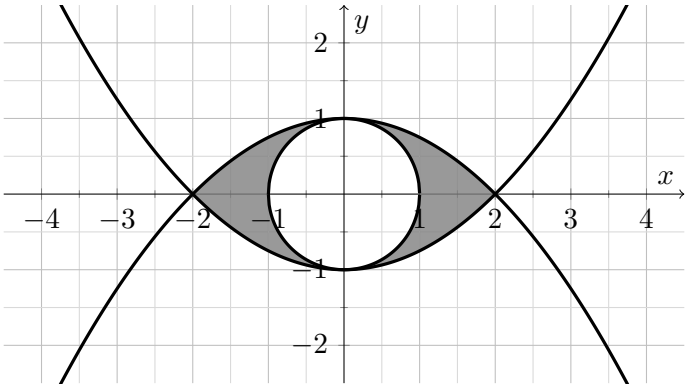
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe zzjKwF

In einer Werbeagentur entsteht für ein neues Logo eine stilisierte Augenform. Die Kontur des Auges wird im Koordinatensystem durch zwei Parabeln beschrieben: eine bildet das obere Lid, die andere das untere Lid. Die dunkel markierte Fläche soll später geplottet und als Folie ausgeschnitten werden, um sie auf ein Fahrzeug zu kleben.



a) Ermitteln Sie zunächst die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln.

Die untere Parabel hat den Scheitelpunkt $S(0 \mid -1)$ und verläuft durch den Punkt $P(2 \mid 0)$.

$$f(x) = a(x-0)^2 - 1 = ax^2 - 1$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ a \cdot 2^2 - 1 &= 0 && \mid +1 \\ 4a &= 1 && \mid :4 \\ a &= 0.25 \\ \Rightarrow f(x) &= 0.25x^2 - 1 \end{aligned}$$

Die obere Parabel hat den Scheitelpunkt $S(0 \mid 1)$ und verläuft ebenfalls durch $P(2 \mid 0)$.

$$g(x) = a(x-0)^2 + 1 = ax^2 + 1$$

$$\begin{aligned} g(2) &= 0 \\ a \cdot 2^2 + 1 &= 0 && \mid -1 \\ 4a &= -1 && \mid :4 \\ a &= -0.25 \\ \Rightarrow g(x) &= -0.25x^2 + 1 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Berechnen Sie anschließend den Flächeninhalt der dunkel markierten Augenfläche.

Zuerst wird die Fläche A_P zwischen den beiden Parabeln im Intervall $[-2;2]$ berechnet.

$$\begin{aligned} d(x) &= g(x) - f(x) \\ &= -0.25x^2 + 1 - (0.25x^2 - 1) \\ &= -0.25x^2 + 1 - 0.25x^2 + 1 \\ &= -0.5x^2 + 2 \end{aligned}$$

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned} A_P &= 2\int_0^2 (-0.5x^2 + 2)\,dx \\ &= 2\left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_0^2 \\ &= 2\left(-\frac{1}{6}\cdot 2^3 + 2\cdot 2 - 0\right) \\ &= 2\cdot\frac{8}{3} \\ &= \frac{16}{3} \approx 5.333 \end{aligned}$$

Davon wird die Kreisfläche A_K der Pupille mit Radius $r = 1$ abgezogen.

$$\begin{aligned} A_K &= \pi \cdot 1^2 = \pi \approx 3.142 \\ A &= A_P - A_K \\ &= \frac{16}{3} - \pi \\ &\approx 2.192 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der dunkel markierten Augenfläche beträgt etwa 2.19 FE.

c) Bestimmen Sie schließlich, wie groß der prozentuale Anteil der Pupille an der gesamten Augenfläche ist.

$$\begin{aligned} p &= \frac{A_K}{A_P}\cdot 100\,\% \\ &= \frac{\pi}{\frac{16}{3}}\cdot 100\,\% \\ &\approx 58.905\,\% \end{aligned}$$

Der Anteil der Pupille an der gesamten Augenfläche beträgt etwa 58.9 %.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**