DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe zwhD5K

Bestimmen Sie zu jeder Funktion die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $p(x) = x^2 - 2x - 3$

$$\begin{aligned} p'(x) &= 2x - 2 \\ p''(x) &= 2 \\ p'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ 0 &= x^2 - 2x - 3 \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} \\ x_1 = 3 \quad &\vee \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $p'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x - 2 \quad &| +2 \\ 2x &= 2 \quad &| :2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $p'(x) = 0 \quad \wedge \quad p''(x) \neq 0$

$$p''(1) = 2 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

y-Wert: $p(x) = y$

$$p(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4 \qquad \Rightarrow \text{TP}(1 \mid -4)$$

Wendepunkt
notw. Bed.: $p''(x) = 0$

$$0 = 2 \qquad \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

Da $p''(x) = 2$ konstant ist und nie 0 wird, besitzt die Funktion keinen Wendepunkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $p(x) = x^3 - 6x$

$$\begin{aligned} p'(x) &= 3x^2 - 6 \\ p''(x) &= 6x \\ p'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ 0 &= x^3 - 6x \\ &= x(x^2 - 6) && | \; x_1 = 0 \\ \\ 0 &= x^2 - 6 && | \; +6 \\ x^2 &= 6 && | \; \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{6} \approx 2.449 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{6} \approx -2.449 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $p'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 6 && | \; :3 \\ 0 &= x^2 - 2 \\ x_1 &= \sqrt{2} \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $p'(x) = 0 \quad \wedge \quad p''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} p''(\sqrt{2}) &= 6\sqrt{2} \approx 8.485 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ p''(-\sqrt{2}) &= -6\sqrt{2} \approx -8.485 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $p(x) = y$

$$\begin{aligned} p(\sqrt{2}) &= -4\sqrt{2} \approx -5.657 && \Rightarrow \text{TP}(1.41 \mid -5.66) \\ p(-\sqrt{2}) &= 4\sqrt{2} \approx 5.657 && \Rightarrow \text{HP}(-1.41 \mid 5.66) \end{aligned}$$

Wendepunkt
notw. Bed.: $p''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x \quad | \; :6 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $p''(x) = 0 \quad \wedge \quad p'''(x) \neq 0$

$$p'''(0) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $p(x) = y$

$$p(0) = 0 \qquad \Rightarrow \text{WP}_1(0 \mid 0)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$$\begin{aligned} p'(x) &= 4x^3 - 4x \\ p''(x) &= 12x^2 - 4 \\ p'''(x) &= 24x \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ 0 &= x^4 - 2x^2 + 1 && | \; x^2 = z \\ &= z^2 - 2z + 1 \\ z_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - 1} \\ z &= 1 && | \; x = \sqrt{z} \\ x_1 &= 1 \quad \vee \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $p'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 4x \\ &= x(4x^2 - 4) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2 - 4 && | \; +4 \\ 4x^2 &= 4 && | \; :4 \\ x^2 &= 1 && | \; \sqrt{} \\ x_2 &= 1 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $p'(x) = 0 \quad \wedge \quad p''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} p''(0) &= 12 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ p''(1) &= 12 \cdot 1^2 - 4 = 8 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ p''(-1) &= 12 \cdot (-1)^2 - 4 = 8 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $p(x) = y$

$$\begin{aligned} p(0) &= 1 && \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 1) \\ p(1) &= 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0 && \Rightarrow \text{TP}_1(1 \mid 0) \\ p(-1) &= (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 0 && \Rightarrow \text{TP}_2(-1 \mid 0) \end{aligned}$$

Wendepunkt
notw. Bed.: $p''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 4 && | \; +4 \\ 12x^2 &= 4 && | \; :12 \\ x^2 &= \frac{1}{3} && | \; \sqrt{} \\ x_1 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0.577 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0.577 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

hinr. Bed.: $p''(x) = 0 \quad \wedge \quad p'''(x) \neq 0$

$$p'''\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) \approx 13.856 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$p'''\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) \approx -13.856 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $p(x) = y$

$$p\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{9} \approx 0.444 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0.58 \mid 0.44)$$
$$p\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = \frac{4}{9} \approx 0.444 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-0.58 \mid 0.44)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $p(x) = x^3 - 10.5x^2 + 36.5x - 42$

$$\begin{aligned} p'(x) &= 3x^2 - 21x + 36.5 \\ p''(x) &= 6x - 21 \\ p'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ 0 &= x^3 - 10.5x^2 + 36.5x - 42 \quad | \, x_1 = 3 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -\frac{21}{2} & \frac{73}{2} & -42 \\ 3 & & 3 & -\frac{45}{2} & 42 \\ \hline & 1 & -\frac{15}{2} & 14 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 7.5x + 14 \\ x_{2/3} &= 3.75 \pm \sqrt{3.75^2 - 14} \\ x_2 &= 4 \quad \vee \quad x_3 = 3.5 \end{aligned}$$

Extrempunkt

notw. Bed.: $p'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 21x + 36.5 \qquad | :3 \\ &= x^2 - 7x + \frac{73}{6} \\ x_{1/2} &= 3.5 \pm \sqrt{3.5^2 - \frac{73}{6}} \\ x_1 &\approx 3.789 \quad \vee \quad x_2 \approx 3.211 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $p'(x) = 0 \quad \wedge \quad p''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} p''(3.789) &= 6 \cdot 3.789 - 21 = 1.734 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ p''(3.211) &= 6 \cdot 3.211 - 21 = -1.734 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $p(x) = y$

$$\begin{aligned} p(3.789) &\approx -0.048 \qquad \Rightarrow \text{TP}(3.79 \mid -0.05) \\ p(3.211) &\approx 0.048 \qquad \Rightarrow \text{HP}(3.21 \mid 0.05) \end{aligned}$$

Wendepunkt

notw. Bed.: $p''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 21 \quad | +21 \\ 6x &= 21 \qquad | :6 \\ x &= 3.5 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $p''(x) = 0 \quad \wedge \quad p'''(x) \neq 0$

$$p'''(3.5) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

y-Wert: $p(x) = y$

$$p(3.5) = 3.5^3 - 10.5 \cdot 3.5^2 + 36.5 \cdot 3.5 - 42 = 0 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(3.5 \mid 0)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**