DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe zdWarv

Untersuchen Sie die Funktionen auf Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 8x - 1 \\ f''(x) &= 6x - 8 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$0 = x^3 - 4x^2 - x + 4 \quad | \; x_1 = -1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -1 & 4 \\ -1 & & -1 & 5 & -4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 5x + 4 \\ x_{2/3} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4} \\ x_2 = 4 \quad &\vee \quad x_3 = 1 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 8x - 1 && | :3 \\ &= x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{1}{3} \\ x_{1/2} &= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}} \\ x_1 \approx 2.786 \quad &\vee \quad x_2 \approx -0.120 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(2.786) &= 6 \cdot 2.786 - 8 = 8.716 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-0.120) &= 6 \cdot (-0.120) - 8 = -8.72 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(2.786) &\approx -8.209 && \Rightarrow \text{TP}(2.79 \mid -8.21) \\ f(-0.120) &\approx 4.061 && \Rightarrow \text{HP}(-0.12 \mid 4.06) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Wendepunkt
notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 8 && | +8 \\ 6x &= 8 && | :6 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{56}{27} \approx -2.074 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.33 \mid -2.07)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 4x - 5 \\ f''(x) &= 6x + 4 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$0 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \quad | \; x_1 = -3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -3 & & -3 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - x - 2 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 2} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 + 4x - 5 && | :3 \\ &= x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \\ x_{1/2} &= -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}} \\ x_1 &\approx 0.786 \quad \vee \quad x_2 \approx -2.120 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(0.786) &= 6 \cdot 0.786 + 4 = 8.716 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-2.120) &= 6 \cdot (-2.120) + 4 = -8.72 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0.786) &\approx -8.209 && \Rightarrow \text{TP}(0.79 \mid -8.21) \\ f(-2.120) &\approx 4.061 && \Rightarrow \text{HP}(-2.12 \mid 4.06) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Wendepunkt

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x + 4 && | -4 \\ 6x &= -4 && | :6 \\ x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{56}{27} \approx -2.074 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(-0.67 \mid -2.07)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 - 8x + 16 \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x - 8 \\ f'''(x) &= 24x - 24 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x \\ &= x(x^3 - 4x^2 - 4x + 16) \quad \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$0 = x^3 - 4x^2 - 4x + 16 \qquad \mid x_2 = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -4 & 16 \\ -2 & & -2 & 12 & -16 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 6x + 8 \\ x_{3/4} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\ x_3 &= 4 \quad \vee \quad x_4 = 2 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$0 = 4x^3 - 12x^2 - 8x + 16 \quad \mid x_1 = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -12 & -8 & 16 \\ 1 & & 4 & -8 & -16 \\ \hline & 4 & -8 & -16 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2 - 8x - 16 \qquad \mid :4 \\ &= x^2 - 2x - 4 \\ x_{2/3} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 4} \\ x_2 &\approx 3.236 \quad \vee \quad x_3 \approx -1.236 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(1) &= 12 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 - 8 = -20 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ f''(3.236) &\approx 39.996 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-1.236) &\approx 39.996 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1 = 9 && \Rightarrow \text{HP}(1 \mid 9) \\ f(3.236) &\approx -16 && \Rightarrow \text{TP}(3.24 \mid -16) \\ f(-1.236) &\approx -16 && \Rightarrow \text{TP}(-1.24 \mid -16) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Wendepunkt
notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 24x - 8 && | :12 \\ &= x^2 - 2x - \frac{2}{3} \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + \frac{2}{3}} \\ x_1 &\approx 2.291 \quad \vee \quad x_2 \approx -0.291 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(2.291) &= 24 \cdot 2.291 - 24 = 30.984 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-0.291) &= 24 \cdot (-0.291) - 24 = -30.984 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(2.291) &\approx -4.889 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(2.29 \mid -4.89) \\ f(-0.291) &\approx -4.889 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-0.29 \mid -4.89) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 14x - 8$$
$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 14$$
$$f'''(x) = 24x + 12$$

Nullstellen

$$0 = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 \quad | \; x_1 = -3$$

	1	2	−7	−8	12
−3		−3	3	12	−12
	1	−1	−4	4	0

$$0 = x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad | \; x_2 = -2$$

	1	−1	−4	4
−2		−2	6	−4
	1	−3	2	0

$$0 = x^2 - 3x + 2$$
$$x_{3/4} = 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 2}$$
$$x_3 = 2 \quad \vee \quad x_4 = 1$$

Extrempunkt

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$0 = 4x^3 + 6x^2 - 14x - 8 \quad | \; x_1 = -0.5$$

	4	6	−14	−8
$-\frac{1}{2}$		−2	−2	8
	4	4	−16	0

$$0 = 4x^2 + 4x - 16 \qquad | :4$$
$$= x^2 + x - 4$$
$$x_{2/3} = -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 4}$$
$$x_2 \approx 1.562 \quad \vee \quad x_3 \approx -2.562$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(-0.5) &= 12 \cdot (-0.5)^2 + 12 \cdot (-0.5) - 14 = -17 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ f''(1.562) &\approx 34.022 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-2.562) &\approx 34.022 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(-0.5) &\approx 14.063 && \Rightarrow \text{HP}(-0.5 \mid 14.06) \\ f(1.562) &\approx -4 && \Rightarrow \text{TP}(1.56 \mid -4) \\ f(-2.562) &\approx -4 && \Rightarrow \text{TP}(-2.56 \mid -4) \end{aligned}$$

Wendepunkt
notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 + 12x - 14 && \mid :12 \\ &= x^2 + x - \frac{7}{6} \\ x_{1/2} &= -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + \frac{7}{6}} \\ x_1 &\approx 0.690 \quad \vee \quad x_2 \approx -1.690 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0.690) &= 24 \cdot 0.690 + 12 = 28.56 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-1.690) &= 24 \cdot (-1.690) + 12 = -28.56 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0.690) &\approx 4.031 && \Rightarrow \text{WP}_1(0.69 \mid 4.03) \\ f(-1.690) &\approx 4.031 && \Rightarrow \text{WP}_2(-1.69 \mid 4.03) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x + 2 \\ f'''(x) &= 24x - 24 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$0 = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x \quad | \; x_1 = -1$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 & 0 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 5x^2 + 6x \\ &= x(x^2 - 5x + 6) \quad | \; x_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 5x + 6 \\ x_{3/4} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 6} \\ x_3 &= 3 \quad \vee \quad x_4 = 2 \end{aligned}$$

Extrempunkt

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$0 = 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 \quad | \; x_1 = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -12 & 2 & 6 \\ 1 & & 4 & -8 & -6 \\ \hline & 4 & -8 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2 - 8x - 6 \quad | :4 \\ &= x^2 - 2x - 1.5 \\ x_{2/3} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 1.5} \\ x_2 &\approx 2.581 \quad \vee \quad x_3 \approx -0.581 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(1) &= 12 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 + 2 = -10 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ f''(2.581) &\approx 19.995 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-0.581) &\approx 19.995 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 1^2 + 6 \cdot 1 = 4 && \Rightarrow \text{HP}(1 \mid 4) \\ f(2.581) &\approx -2.25 && \Rightarrow \text{TP}(2.58 \mid -2.25) \\ f(-0.581) &\approx -2.25 && \Rightarrow \text{TP}(-0.58 \mid -2.25) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Wendepunkt
notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 24x + 2 && | :12 \\ &= x^2 - 2x + \frac{1}{6} \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - \frac{1}{6}} \\ x_1 &\approx 1.913 \quad \vee \quad x_2 \approx 0.087 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(1.913) &= 24 \cdot 1.913 - 24 = 21.912 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(0.087) &= 24 \cdot 0.087 - 24 = -21.912 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(1.913) &\approx 0.527 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.91 \mid 0.53) \\ f(0.087) &\approx 0.527 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(0.09 \mid 0.53) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x + 4$$
$$f''(x) = 12x^2 - 18$$
$$f'''(x) = 24x$$

Nullstellen

$$0 = x^4 - 9x^2 + 4x + 12 \quad | \; x_1 = -3$$

	1	0	−9	4	12
−3		−3	9	0	−12
	1	−3	0	4	0

$$0 = x^3 - 3x^2 + 4 \quad | \; x_2 = -1$$

	1	−3	0	4
−1		−1	4	−4
	1	−4	4	0

$$0 = x^2 - 4x + 4$$
$$x_{3/4} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4}$$
$$x_3 = 2 \quad \text{(doppelte Nullstelle)}$$

Extrempunkt

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$0 = 4x^3 - 18x + 4 \quad | \; x_1 = 2$$

	4	0	−18	4
2		8	16	−4
	4	8	−2	0

$$0 = 4x^2 + 8x - 2 \qquad | :4$$
$$= x^2 + 2x - 0.5$$
$$x_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 0.5}$$
$$x_2 = -1 + \sqrt{1.5} \approx 0.225 \quad \vee \quad x_3 = -1 - \sqrt{1.5} \approx -2.225$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(2) = 12 \cdot 2^2 - 18 = 30 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$f''(0.225) \approx -17.393 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$
$$f''(-2.225) \approx 41.408 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(2) = 2^4 - 9 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 12 = 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}(2 \mid 0)$$
$$f(0.225) \approx 12.447 \qquad \Rightarrow \text{HP}(0.22 \mid 12.45)$$
$$f(-2.225) \approx -16.947 \qquad \Rightarrow \text{TP}(-2.22 \mid -16.95)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Wendepunkt
notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 18 && | +18 \\ 12x^2 &= 18 && | :12 \\ x^2 &= 1.5 && | \sqrt{\ } \\ x_1 &= \sqrt{1.5} \approx 1.225 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{1.5} \approx -1.225 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(\sqrt{1.5}) &= 24 \cdot \sqrt{1.5} \approx 29.394 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-\sqrt{1.5}) &= -24 \cdot \sqrt{1.5} \approx -29.394 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{1.5}) &= 0.75 + 4\sqrt{1.5} \approx 5.649 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.22 \mid 5.65) \\ f(-\sqrt{1.5}) &= 0.75 - 4\sqrt{1.5} \approx -4.149 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-1.22 \mid -4.15) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**