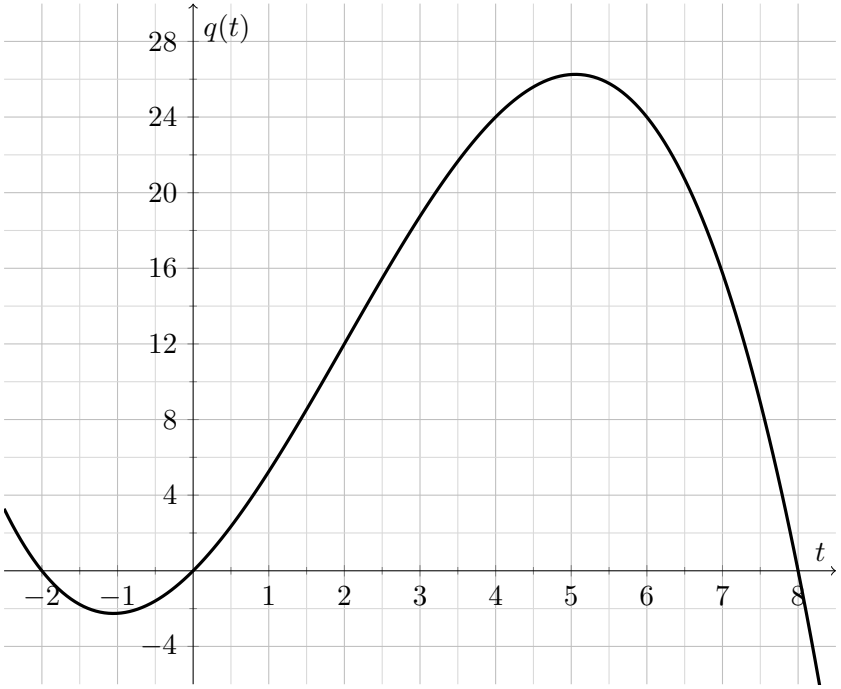
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe zV3nss

In einer großen Industrieanlage wird ein Speichertank mit einer Flüssigkeit befüllt, der später als Puffer für einen Produktionsprozess dient. Während des Befüllens wird nicht nur der Füllstand beobachtet, sondern vor allem die Zuflussrate: Sie ist am Anfang oft gering (Ventile öffnen, Druck baut sich auf), steigt dann an und fällt gegen Ende wieder ab (weil geregelt wird, um Überlaufen zu vermeiden).
Dazu ist hier der Graph der Zuflussrate $q(t)$ abgebildet. Daraus sollen geeignete Informationen abgelesen und daraus ein Modell erstellt werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen ($0 \leq t \leq 8$), die Zuflussrate $q(t)$ in m^3/h.



Der Graph ist zur besseren Ablesbarkeit auch für $-2 \leq t < 0$ gezeichnet. Dieser Teil hat im Sachzusammenhang keine Bedeutung.

a) Lesen Sie aus dem Graphen vier geeignete Informationen ab und bestimmen Sie eine passende Funktionsgleichung $q(t)$.

Der Graph entspricht einer Funktion dritten Grades:

$$q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

Aus dem Graphen werden abgelesen: Der Graph verläuft durch den Ursprung $O(0 \mid 0)$ sowie durch $A(-2 \mid 0)$, $B(8 \mid 0)$ und $C(2 \mid 12)$.

$$\begin{aligned}
q(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 0 \\
q(-2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) && = -8a + 4b - 2c \\
q(8) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2 + c \cdot 8 && = 512a + 64b + 8c \\
q(2) = 12 \quad &\Rightarrow \quad 12 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 && = 8a + 4b + 2c
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 4 & -2 & 0 \\ 512 & 64 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 12 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid :2 \\ \mid :8 \\ \mid :2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & -1 & 0 \\ 64 & 8 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{II} + 16 \cdot \text{I} \\ \text{III} + \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 40 & -15 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{array}\right) \quad 10 \cdot \text{III} - \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 40 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 60 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \text{III} & 15c = 60 & \mid :15 \\ & c = 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II} & 40b - 15 \cdot 4 = 0 & \\ & 40b - 60 = 0 & \mid +60 \\ & 40b = 60 & \mid :40 \\ & b = 1.5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & -4a + 2 \cdot 1.5 - 4 = 0 & \\ & -4a - 1 = 0 & \mid +1 \\ & -4a = 1 & \mid :(-4) \\ & a = -0.25 & \end{array}$$

$$\Rightarrow q(t) = -0.25t^3 + 1.5t^2 + 4t$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Prüfen Sie anhand des Modells, ob im Zeitraum $[0;8]$ durchschnittlich $15\,\mathrm{m}^3$ Flüssigkeit pro Stunde in den Tank gelangen, damit der Filterkreislauf stabil starten kann.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{8-0}\int_0^8 (-0.25t^3 + 1.5t^2 + 4t)\,dt \\ &= \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{16}t^4 + 0.5t^3 + 2t^2\right]_0^8 \\ &= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{16}\cdot 8^4 + 0.5\cdot 8^3 + 2\cdot 8^2 - 0\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(-256 + 256 + 128\right) \\ &= \frac{1}{8}\cdot 128 = 16 \end{aligned}$$

Im Zeitraum $[0;8]$ gelangen also durchschnittlich $16\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$ in den Tank. Da $16 > 15$ ist, wird der benötigte Durchschnittswert erreicht. Der Filterkreislauf kann nach diesem Modell also stabil starten.

c) Zu welchem Zeitpunkt wird die Flüssigkeit am schnellsten eingefüllt? Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt und geben Sie die Zuflussrate $q(t)$ zu diesem Zeitpunkt an.

$$\begin{aligned} q'(t) &= -0.75t^2 + 3t + 4 \\ q''(t) &= -1.5t + 3 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $q'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.75t^2 + 3t + 4 && \mid :(-0.75) \\ &= t^2 - 4t - \frac{16}{3} \\ t_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 + \frac{16}{3}} \\ t_1 &\approx 5.055 \quad \vee \quad t_2 \approx -1.055 \end{aligned}$$

Im Intervall $[0;8]$ ist nur $t_1 \approx 5.055$ relevant.

hinr. Bed.: $q'(t) = 0 \quad \wedge \quad q''(t) \neq 0$

$$q''(5.055) = -1.5 \cdot 5.055 + 3 \approx -4.583 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $q(t) = y$

$$q(5.055) \approx 26.257 \qquad \Rightarrow \text{HP}(5.06 \mid 26.26)$$

Randwerte:

$$q(0) = 0 \quad \wedge \quad q(8) = 0$$

Die Flüssigkeit wird also nach ungefähr 5.06 h am schnellsten eingefüllt. Die maximale Zuflussrate beträgt dabei ungefähr $26.26\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**