DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe ygLd4S

Für das digitale Lehrwerk „DAS MATHEBUCH“ soll zusätzlich eine gedruckte Sonderauflage produziert werden, um sie an Schulen und Bildungseinrichtungen zu verkaufen. Damit die Entscheidung wirtschaftlich begründet werden kann, werden die Herstellungskosten modellhaft mit einer Funktion beschrieben.
Als Variable wird die Auflage x verwendet, wobei x die Anzahl der gedruckten Bücher in Tausend Stück angibt (also $x = 1$ entspricht $1\,000$ Büchern).
Der Stückpreis wird als konstant angenommen und beträgt 20 Euro pro Buch.
Die Kosten setzen sich aus Fixkosten (z. B. Layout, Druckvorbereitung, Einrichtungskosten) und variablen Kosten (z. B. Papier, Druck, Bindung, Verpackung) zusammen. Da bei größeren Auflagen Effekte wie Mengenrabatte, Auslastung und zusätzliche Logistik auftreten können, wird die Kostenfunktion in diesem Modell als ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben:
$K(x) = 0.6x^3 - 4.8x^2 + 18.65x + 10.8$
Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in Tausend Euro (T€) an – das ist die Einheit der y-Achse.

Beziehen Sie sich in dieser Aufgabe auf die Situationsbeschreibung zur Sonderauflage von „DAS MATHEBUCH“. Dabei bezeichnet x die Auflage in Tausend Stück (z. B. $x = 1$ bedeutet $1\,000$ gedruckte Bücher). Die y-Werte der Funktionen geben die jeweiligen Beträge in Tausend Euro an. Beispiel: Ein Funktionswert von 20 entspricht 20 000 Euro.

a) Ermitteln Sie aus der Kostenfunktion $K(x)$ die Fixkosten $K(0)$. Beschreiben Sie kurz, was dieser Wert im Kontext der Druckerei bedeutet.

$$K(0) = 0.6 \cdot 0^3 - 4.8 \cdot 0^2 + 18.65 \cdot 0 + 10.8 = 10.8$$

Die Fixkosten betragen also 10 800 Euro. Dieser Betrag fällt auch dann an, wenn noch kein einziges Buch gedruckt wird, also z. B. für Layout, Druckvorbereitung und Einrichtungskosten.

b) Stellen Sie aus dem gegebenen Stückpreis eine passende Erlösfunktion $E(x)$ auf.

Da x die Auflage in Tausend Stück angibt und ein Buch 20 Euro kostet, gilt für den Erlös in Tausend Euro:

$$E(x) = 20x$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion und berechnen Sie, ab welcher Auflage die Produktion zum ersten Mal Gewinn abwirft (Gewinnschwelle) und bis zu welcher Auflage sie noch Gewinn abwirft (Gewinngrenze).

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= 20x - (0.6x^3 - 4.8x^2 + 18.65x + 10.8) \\ &= -0.6x^3 + 4.8x^2 + 1.35x - 10.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(x) &= 0 \\ 0 &= -0.6x^3 + 4.8x^2 + 1.35x - 10.8 \quad | \, x_1 = 8 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

	$-\frac{3}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{27}{20}$	$-\frac{54}{5}$
8		$-\frac{24}{5}$	0	$\frac{54}{5}$
	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{27}{20}$	0

$$\begin{aligned} 0 &= -0.6x^2 + 1.35 && | \, +0.6x^2 \\ 0.6x^2 &= 1.35 && | \, :0.6 \\ x^2 &= 2.25 && | \, \sqrt{} \\ x_2 &= 1.5 \quad \vee \quad x_3 = -1.5 \end{aligned}$$

Im Sachzusammenhang sind nur $x_2 = 1.5$ und $x_1 = 8$ relevant. Die Gewinnschwelle liegt bei $x = 1.5$ (also 1 500 Büchern) und die Gewinngrenze bei $x = 8$ (also 8 000 Büchern).

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Ermitteln Sie die Auflage, bei der der Gewinn am größten ist, und geben Sie den maximalen Gewinn an. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

Der maximale Gewinn liegt an einem Hochpunkt der Gewinnfunktion. Daher werden die Extrempunkte von G bestimmt.

$$G'(x) = -1.8x^2 + 9.6x + 1.35$$
$$G''(x) = -3.6x + 9.6$$

notw. Bed.: $G'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -1.8x^2 + 9.6x + 1.35 && | :(-1.8) \\ &= x^2 - \frac{16}{3}x - 0.75 \\ x_{1/2} &= \frac{8}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 0.75} \\ x_1 &\approx 5.47 \quad \vee \quad x_2 \approx -0.137 \end{aligned}$$

Im Sachzusammenhang ist nur $x_1 \approx 5.47$ relevant.

hinr. Bed.: $G'(x) = 0 \quad \wedge \quad G''(x) \neq 0$

$$G''(5.47) = -3.6 \cdot 5.47 + 9.6 = -10.092 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $G(x) = y$

$$G(5.47) = -0.6 \cdot 5.47^3 + 4.8 \cdot 5.47^2 + 1.35 \cdot 5.47 - 10.8 \approx 42.004 \qquad \Rightarrow \text{HP}(5.47 \mid 42)$$

Der Gewinn ist also bei einer Auflage von etwa $x = 5.47$ (also 5 470 Büchern) am größten. Der maximale Gewinn beträgt etwa 42 000 Euro.

e) Untersuchen Sie, wie stark die Kosten bei $x = 1.5$ momentan ansteigen. Interpretieren Sie das Ergebnis als „zusätzliche Kosten pro 1 000 Bücher“ und übertragen Sie es anschließend auf „zusätzliche Kosten pro Buch“.

$$K'(x) = 1.8x^2 - 9.6x + 18.65$$

$$K'(1.5) = 1.8 \cdot 1.5^2 - 9.6 \cdot 1.5 + 18.65 = 8.3$$

Der momentane Kostenanstieg bei einer Auflage von 1 500 Büchern beträgt 8 300 Euro pro weiteren 1 000 Büchern. Das entspricht zusätzlichen Kosten von 8.30 Euro pro weiterem Buch.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) Berechnen Sie bei $x = 1.5$ die durchschnittlichen Kosten pro Buch (Stückkosten). Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Stückpreis und formulieren Sie daraus eine kurze wirtschaftliche Einschätzung, ob die Auflage von 1 500 Büchern sinnvoll erscheint.

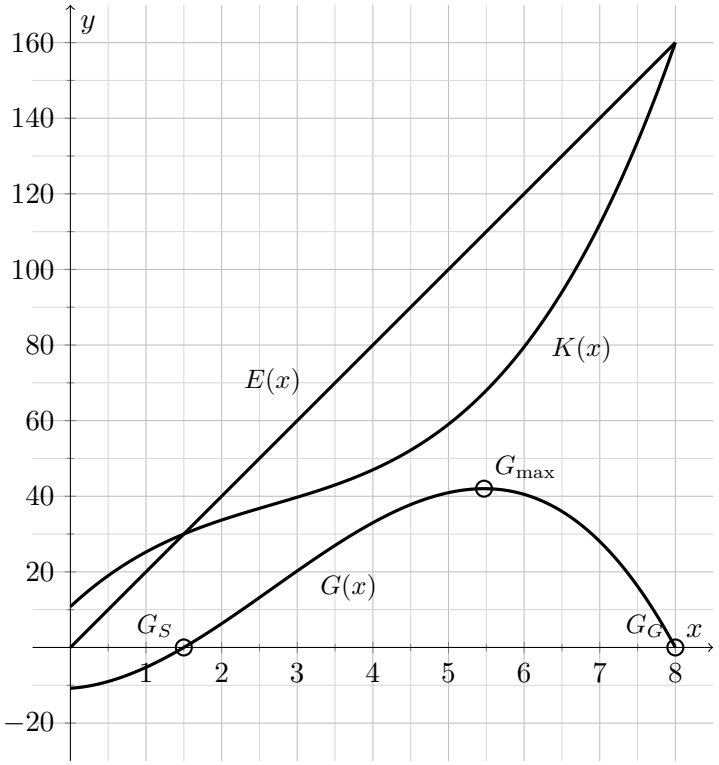
$$K(1.5) = 0.6 \cdot 1.5^3 - 4.8 \cdot 1.5^2 + 18.65 \cdot 1.5 + 10.8 = 30$$

$$k(1.5) = \frac{K(1.5)}{1.5} = \frac{30}{1.5} = 20$$

Die Gesamtkosten für 1 500 Bücher betragen 30 000 Euro, also genau 20 Euro pro Buch. Damit entsprechen die Stückkosten exakt dem Stückpreis. Die Auflage von 1 500 Büchern ist daher wirtschaftlich nicht sinnvoll, da an dieser Stelle zwar kein Verlust mehr entsteht, aber auch noch kein Gewinn erzielt wird.

g) Skizzieren Sie $K(x)$, $E(x)$ und $G(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem (nutzen Sie die Tabellenfunktion). Markieren Sie Gewinnschwelle, Gewinngrenze und das Gewinnmaximum am Graphen.

(Koordinatensystem: x-Achse: $0 \leq x \leq 8$ mit $1\,\text{cm} = 1$ Einheit; y-Achse: $-20 \leq y \leq 160$ mit $1\,\text{cm} = 20$ Einheiten)



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**