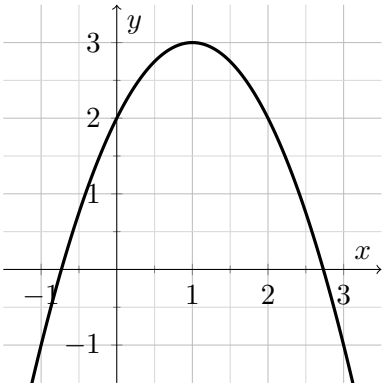
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe yfzgb4

Bestimmen Sie die zwischen Graph und x-Achse eingeschlossene (geometrische) Fläche.

a)



Aus dem Graphen: $S(1 \mid 3)$, $\quad P(0 \mid 2)$

$$f(x) = a(x-1)^2 + 3$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ a(0-1)^2 + 3 &= 2 \qquad | -3 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

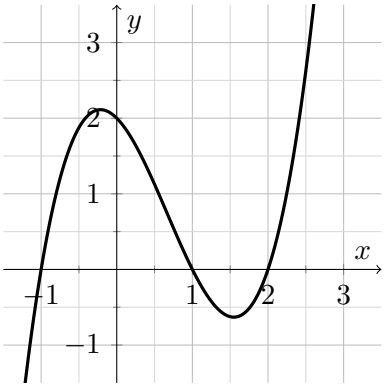
$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= -(x-1)^2 + 3 \\ &= -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) + 3 \\ &= -(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= -x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 2x + 2 \qquad | :(-1) \\ &= x^2 - 2x - 2 \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 2} \\ x_1 &= 1 + \sqrt{3} \approx 2.732 \quad \vee \quad x_2 = 1 - \sqrt{3} \approx -0.732 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-0.732}^{2.732} (-x^2 + 2x + 2)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x \right]_{-0.732}^{2.732} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 2.732^3 + 2.732^2 + 2 \cdot 2.732 \\ &\quad - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-0.732)^3 + (-0.732)^2 + 2 \cdot (-0.732) \right) \\ &\approx 6.131 - (-0.797) \\ &\approx 6.928 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b)



Aus dem Graphen: $x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad P(0 \mid 2)$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x+1)(x-1)(x-2) \\ f(0) &= 2 \\ a(0+1)(0-1)(0-2) &= 2 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 2a &= 2 && \mid :2 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) = (x^2-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 - \frac{2}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)\right)$$

$$= \frac{13}{12} - \left(-\frac{19}{12}\right) = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{1}^{2}$$

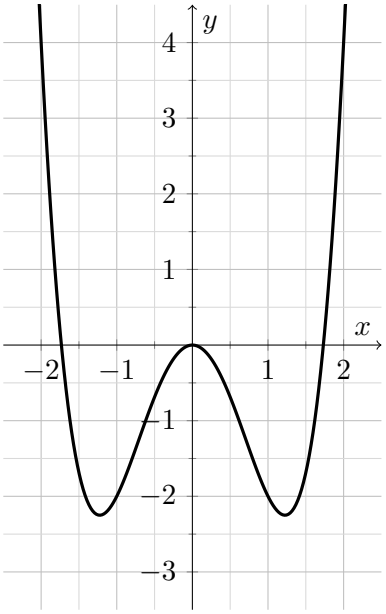
$$= \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{2}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{13}{12} = -\frac{5}{12}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{8}{3}\right| + \left|-\frac{5}{12}\right| = \frac{37}{12} \approx 3.083$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c)



Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse und verläuft durch den Ursprung. Ansatz für eine Funktion 4. Grades: $f(x) = ax^4 + bx^2$, aus dem Graphen: $P(1 \mid -2)$, $Q(2 \mid 4)$

$$\begin{aligned} f(1) = -2 \quad &\Rightarrow \quad -2 = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 \quad &= a + b \\ f(2) = 4 \quad &\Rightarrow \quad 4 = a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 \quad &= 16a + 4b \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 16 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad \text{II} - 16 \cdot \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -12 & 36 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad -12b &= 36 \quad &| :(-12) \\ b &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad a + (-3) &= -2 \quad &| +3 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 - 3x^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - 3x^2 \\ &= x^2(x^2 - 3) \quad &| \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 3 \quad &| +3 \\ x^2 &= 3 \quad &| \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{3} \approx 1.732 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{3} \approx -1.732 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\sqrt{3}} (x^4 - 3x^2)\,dx \\ &= \left[0.2x^5 - x^3\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 0.2 \cdot (\sqrt{3})^5 - (\sqrt{3})^3 - 0 = 1.8\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -1.2\sqrt{3} \approx -2.078 \end{aligned}$$

$$A = 2 \cdot |A_1| = 2 \cdot \left|-1.2\sqrt{3}\right| = 2.4\sqrt{3} \approx 4.157$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**