DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe y9prCB

Eine große Bäckerei stellt morgens Brötchen in mehreren Backläufen her. Zu bestimmten Uhrzeiten läuft die Produktion besonders effizient, zwischendurch können Umrüstungen oder Teigpausen dazu führen, dass die Produktionsrate deutlich sinkt. Die Anzahl der pro Stunde gebackenen Brötchen wird für einen bestimmten Morgen modellhaft durch die Funktion $p(t) = 0.2t^3 - 1.6t^2 + 3.2t$ beschrieben. Dabei steht t für die Uhrzeit (in Stunden) und $p(t)$ für die Produktionsrate (in Hunderten Brötchen pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion $p(t)$ im Intervall $[0; 5]$.

$$p'(t) = 0.6t^2 - 3.2t + 3.2$$
$$p''(t) = 1.2t - 3.2$$

notw. Bed.: $p'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.6t^2 - 3.2t + 3.2 && | :0.6 \\ &= t^2 - \frac{16}{3}t + \frac{16}{3} \\ t_{1/2} &= \frac{8}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}} \\ t_1 = 4 \quad &\vee \quad t_2 = \frac{4}{3} \approx 1.333 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $p'(t) = 0 \quad \wedge \quad p''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} p''(4) &= 1.2 \cdot 4 - 3.2 = 1.6 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ p''\left(\frac{4}{3}\right) &= 1.2 \cdot \frac{4}{3} - 3.2 = -1.6 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $p(t) = y$

$$\begin{aligned} p(4) &= 0.2 \cdot 4^3 - 1.6 \cdot 4^2 + 3.2 \cdot 4 = 0 && \Rightarrow \text{TP}(4 \mid 0) \\ p\left(\frac{4}{3}\right) &= 0.2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 1.6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3.2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{135} \approx 1.896 && \Rightarrow \text{HP}\left(\frac{4}{3} \;\middle|\; \frac{256}{135}\right) \end{aligned}$$

b) Deuten Sie die Extrempunkte im Sachzusammenhang: Was bedeutet ein Hochpunkt bzw. ein Tiefpunkt für die Produktionsrate?

Der Hochpunkt beschreibt den Zeitpunkt, zu dem die Produktionsrate am größten ist. Bei $t \approx 1.33$, also um etwa 1:20 Uhr, liegt sie bei etwa 1.9 Hundert Brötchen pro Stunde, also ungefähr 190 Brötchen pro Stunde.

Der Tiefpunkt beschreibt den Zeitpunkt, zu dem die Produktionsrate am kleinsten ist. Bei $t = 4$, also um 4:00 Uhr, liegt sie bei 0 Hundert Brötchen pro Stunde, in diesem Moment werden also keine Brötchen produziert.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Zu welchen Uhrzeiten ist die Produktionsrate $p(t)$ gleich 0? Bestimmen Sie die Nullstellen und erläutern Sie kurz, was diese Zeitpunkte im Kontext bedeuten.

$$\begin{aligned} 0 &= 0.2t^3 - 1.6t^2 + 3.2t \\ &= t(0.2t^2 - 1.6t + 3.2) \quad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.2t^2 - 1.6t + 3.2 \quad | \, :0.2 \\ &= t^2 - 8t + 16 \\ t_{2/3} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} \\ t_2 &= 4 \end{aligned}$$

Die Nullstellen liegen also bei $t = 0$ und $t = 4$.

Das bedeutet im Sachzusammenhang: Zu Beginn des betrachteten Zeitraums um 0:00 Uhr und um 4:00 Uhr ist die Produktionsrate gerade 0, in diesen Momenten werden also keine Brötchen produziert.

d) Berechnen Sie die Produktionsrate zu den Uhrzeiten $t = 1$, $t = 2$ und $t = 3$ und beschreiben Sie, wie sich die Produktion zwischen diesen Zeitpunkten entwickelt.

$$\begin{aligned} p(1) &= 0.2 \cdot 1^3 - 1.6 \cdot 1^2 + 3.2 \cdot 1 = 1.8 \\ p(2) &= 0.2 \cdot 2^3 - 1.6 \cdot 2^2 + 3.2 \cdot 2 = 1.6 \\ p(3) &= 0.2 \cdot 3^3 - 1.6 \cdot 3^2 + 3.2 \cdot 3 = 0.6 \end{aligned}$$

Die Produktionsrate beträgt also bei $t = 1$ etwa 1.8 Hundert (180), bei $t = 2$ etwa 1.6 Hundert (160) und bei $t = 3$ etwa 0.6 Hundert (60) Brötchen pro Stunde.

Zwischen den gegebenen Werten scheint die Produktion also insgesamt abzunehmen. Aus Teilaufgabe a) weiß man jedoch, dass bei $t \approx 1.33$ noch ein Hochpunkt liegt. Das bedeutet: Die Produktion steigt nach $t = 1$ zunächst noch leicht an, erreicht bei $t \approx 1.33$ ihr Maximum und nimmt danach ab.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**