DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe y9fsyM

Gegeben sind vier Punkte eines Funktionsgraphen:

$$P_1(0 \mid -4), \quad P_2(1 \mid 0), \quad P_3(2 \mid -2), \quad P_4(5 \mid 16)$$

Es wird angenommen, dass der Graph zu einer ganzrationalen Funktion 3. Grades gehört.

a) Stellen Sie mit Hilfe der vier Punkte ein lineares Gleichungssystem für a, b, c, d auf und lösen Sie es. Geben Sie anschließend die Funktionsgleichung $f(x)$ an.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{aligned}
f(0) = -4 \quad &\Rightarrow \quad -4 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \quad &&= d \quad \Rightarrow d = -4 \\
f(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 - 4 \quad &&= a + b + c - 4 \\
f(2) = -2 \quad &\Rightarrow \quad -2 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 - 4 \quad &&= 8a + 4b + 2c - 4 \\
f(5) = 16 \quad &\Rightarrow \quad 16 = a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 - 4 \quad &&= 125a + 25b + 5c - 4
\end{aligned}$$

Auf beiden Seiten 4 addieren:

$$\begin{aligned}
4 &= a + b + c \\
2 &= 8a + 4b + 2c \\
20 &= 125a + 25b + 5c
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 125 & 25 & 5 & 20 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{II} - 8 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 125 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -6 & -30 \\ 0 & -100 & -120 & -480 \end{array}\right) \quad \text{III} - 25 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -6 & -30 \\ 0 & 0 & 30 & 270 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{III} \quad 30c &= 270 \quad &&| :30 \\
c &= 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} \quad -4b - 6 \cdot 9 &= -30 \quad &&| +54 \\
-4b &= 24 \quad &&| :(-4) \\
b &= -6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad a + (-6) + 9 &= 4 \quad &&| -3 \\
a &= 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Berechnen Sie die Extrempunkte. Entscheiden Sie, ob Hoch- oder Tiefpunkte vorliegen.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 12x + 9 \quad | :3 \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_1 = 3 \quad &\vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(3) &= 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ f''(1) &= 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 4 = -4 \qquad \Rightarrow \text{TP}(3 \mid -4) \\ f(1) &= 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}(1 \mid 0) \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie den Wendepunkt der Funktion.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$
$$f'''(x) = 6$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 12 \quad | +12 \\ 6x &= 12 \quad | :6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(2) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 4 = -2 \qquad \Rightarrow \text{WP}(2 \mid -2)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion und geben Sie diese (falls möglich) auch mit Vielfachheit an.

$$0 = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \quad | \, x_1 = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 9 & -4 \\ 1 & & 1 & -5 & 4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 5x + 4$$

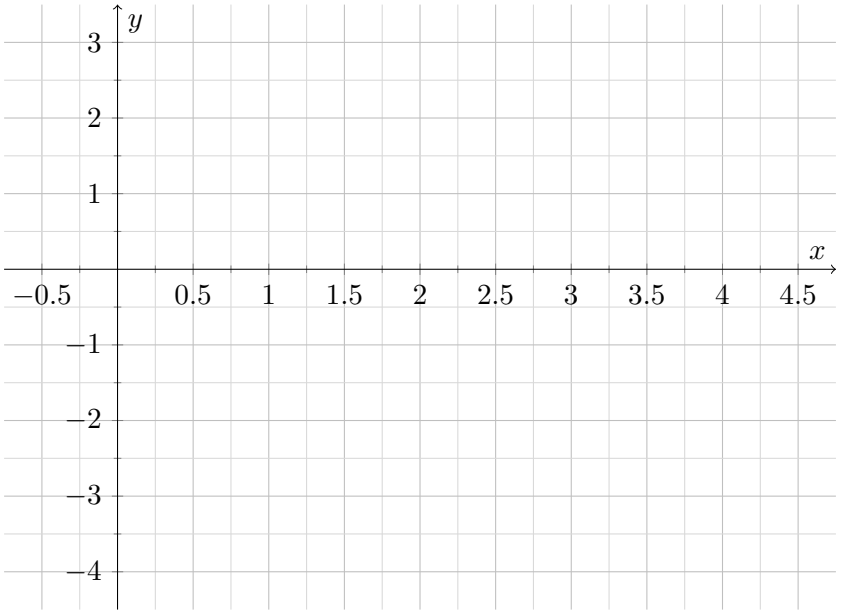
$$x_{2/3} = 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4}$$

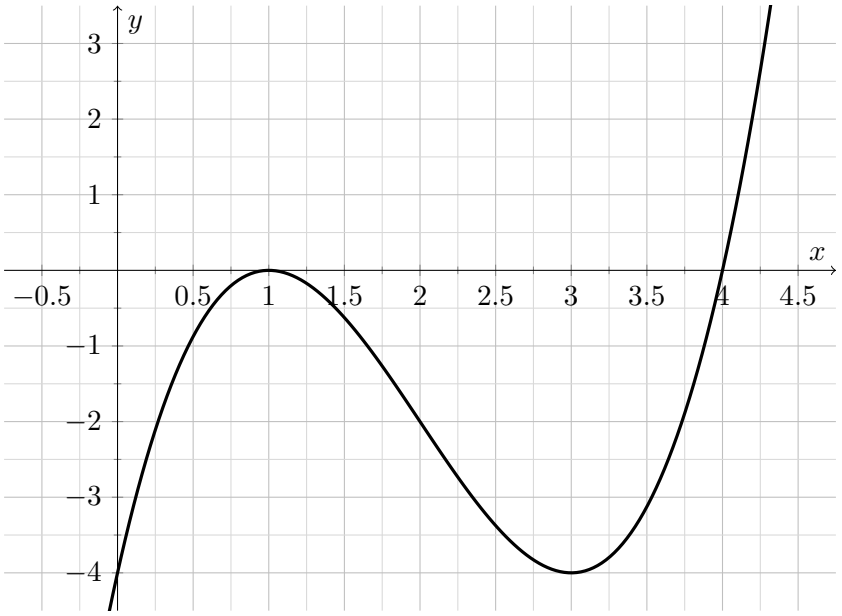
$$x_2 = 4 \quad \vee \quad x_3 = 1$$

Die Nullstelle $x = 1$ tritt zweimal auf ($x_1 = x_3 = 1$). Bei $x = 1$ liegt also eine doppelte Nullstelle vor, bei $x = 4$ eine einfache Nullstelle.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) Zeichnen Sie den Graphen in das Koordinatensystem.





DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**