DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe xvW8Qi

An einem Küstenabschnitt wird untersucht, wie stark Sediment (Sand/Schlick) pro Stunde transportiert wird. Für eine Baustelle am Deich gilt: Ab einer Transportmenge von $S = 5$ (in willkürlichen Transporteinheiten pro Stunde) muss die Baustelle gesichert werden, weil die Strömung dann Material unterspülen kann.
Für $0 \leq x \leq 12$ (x in Stunden seit Messbeginn) beschreibt das Modell die momentane Transportmenge:

$$T(x) = -0.04x^3 + 0.6x^2 - 1.2x + 1$$

Der Sicherheitswert wird als konstante Funktion $S(x) = 5$ dargestellt.

a) Überprüfen Sie im Modell, ob der Transport zu Beginn eher unterhalb oder oberhalb des Sicherheitswertes liegt, und beschreiben Sie kurz, wie sich das im Verlauf verändert.

$$\begin{aligned} T(0) &= -0.04 \cdot 0^3 + 0.6 \cdot 0^2 - 1.2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ T(8) &= -0.04 \cdot 8^3 + 0.6 \cdot 8^2 - 1.2 \cdot 8 + 1 \\ &= -20.48 + 38.4 - 9.6 + 1 \\ &= 9.32 \\ T(12) &= -0.04 \cdot 12^3 + 0.6 \cdot 12^2 - 1.2 \cdot 12 + 1 \\ &= -69.12 + 86.4 - 14.4 + 1 \\ &= 3.88 \end{aligned}$$

Zu Beginn liegt die Transportmenge mit $T(0) = 1 < 5$ unterhalb des Sicherheitswertes. Im Verlauf steigt sie an und überschreitet den Sicherheitswert zwischenzeitlich (z. B. $T(8) = 9.32 > 5$). Gegen Ende fällt sie wieder unter den Sicherheitswert ($T(12) = 3.88 < 5$).

b) Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Transportmenge genau dem Sicherheitswert entspricht. (Diese Zeitpunkte begrenzen die kritischen Phasen.)

$$\begin{aligned} d(x) &= T(x) - S(x) \\ &= -0.04x^3 + 0.6x^2 - 1.2x + 1 - 5 \\ &= -0.04x^3 + 0.6x^2 - 1.2x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.04x^3 + 0.6x^2 - 1.2x - 4 && \mid :(-0.04) \\ &= x^3 - 15x^2 + 30x + 100 && \mid x_1 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -15 & 30 & 100 \\ 5 & & 5 & -50 & -100 \\ \hline & 1 & -10 & -20 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 10x - 20 \\ x_{2/3} &= 5 \pm \sqrt{5^2 + 20} \\ x_2 &\approx 11.708 \quad \vee \quad x_3 \approx -1.708 \end{aligned}$$

Im Intervall $[0; 12]$ liegen nur $x_1 = 5$ und $x_2 \approx 11.708$. Diese beiden Zeitpunkte begrenzen die kritische Phase.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Ermitteln Sie, wie viel „kritische Transportmenge“ insgesamt anfällt, also die aufsummierte Menge oberhalb des Sicherheitswertes. (Im Modell ist das die Fläche zwischen $T(x)$ und $S(x)$ in den Zeitabschnitten, in denen $T(x) \geq S(x)$ gilt.)

Nach a) und b) gilt $T(x) \geq S(x)$ im Intervall $[5; 11.708]$.

$$\begin{aligned}
A &= \int_5^{11.708} (-0.04x^3 + 0.6x^2 - 1.2x - 4)\,dx \\
&= \Big[-0.01x^4 + 0.2x^3 - 0.6x^2 - 4x\Big]_5^{11.708} \\
&= -0.01 \cdot 11.708^4 + 0.2 \cdot 11.708^3 - 0.6 \cdot 11.708^2 - 4 \cdot 11.708 \\
&\quad - \Big(-0.01 \cdot 5^4 + 0.2 \cdot 5^3 - 0.6 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5\Big) \\
&\approx 4 - (-16.25) \\
&\approx 20.25
\end{aligned}$$

Die insgesamt anfallende kritische Transportmenge beträgt etwa 20.25 Flächeneinheiten.

d) Ein Sicherungsteam kann maximal 6 „Flächeneinheiten“ an kritischer Transportmenge abarbeiten. Begründen Sie mit Ihrem Ergebnis aus c), ob das im Modell ausreicht, oder ob zusätzliche Sicherung nötig wäre.

Aus c) ergibt sich $A \approx 20.25$. Das Sicherungsteam kann höchstens 6 Flächeneinheiten abarbeiten.

Da $20.25 > 6$ gilt, reicht ein Sicherungsteam im Modell nicht aus. Es ist zusätzliche Sicherung nötig.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**