DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe xEgCbw

Gegeben ist die Funktion $k(x) = x^4 - 4x^3$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen.

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - 4x^3 \\ &= x^3(x-4) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x - 4 \quad | \, +4 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte und Wendepunkte.

$$\begin{aligned} k'(x) &= 4x^3 - 12x^2 \\ k''(x) &= 12x^2 - 24x \\ k'''(x) &= 24x - 24 \end{aligned}$$

Extrempunkte
notw. Bed.: $k'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 12x^2 \\ &= x^2(4x - 12) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x - 12 \quad | \, +12 \\ 4x &= 12 \quad | \, :4 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $k'(x) = 0 \quad \wedge \quad k''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} k''(0) &= 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0 \\ k''(3) &= 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 = 36 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

Bei $x_1 = 0$ ist die hinreichende Bedingung nicht erfüllt. Für x nahe 0 ist $x^2 > 0$ und $4x - 12 < 0$, also ist $k'(x) = x^2(4x - 12)$ links und rechts von 0 negativ. k' wechselt dort nicht das Vorzeichen, bei $x = 0$ liegt also kein Extrempunkt vor.

y-Wert: $k(x) = y$

$$k(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27 \qquad \Rightarrow \text{TP}(3 \mid -27)$$

Wendepunkte
notw. Bed.: $k''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 24x \\ &= x(12x - 24) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x - 24 \quad | \, +24 \\ 12x &= 24 \quad | \, :12 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $k''(x) = 0 \quad \wedge \quad k'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} k'''(0) &= 24 \cdot 0 - 24 = -24 \neq 0 \qquad \checkmark \\ k'''(2) &= 24 \cdot 2 - 24 = 24 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $k(x) = y$

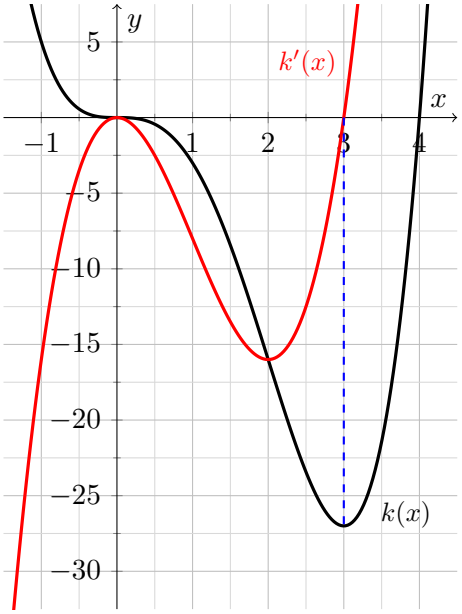
$$\begin{aligned} k(0) &= 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0 \qquad \Rightarrow \text{WP}_1(0 \mid 0) \\ k(2) &= 2^4 - 4 \cdot 2^3 = -16 \qquad \Rightarrow \text{WP}_2(2 \mid -16) \end{aligned}$$

Da bei $x = 0$ zusätzlich $k'(0) = 0$ gilt, ist $\text{WP}_1(0 \mid 0)$ ein Sattelpunkt: $\text{SP}(0 \mid 0)$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Zeichnen Sie $k(x)$ und $k'(x)$ in ein Koordinatensystem (zwei verschiedene Farben) und erläutern Sie anhand der Zeichnung den Zusammenhang zwischen Extremstellen und Nullstellen der Ableitung.

(Koordinatensystem: x-Achse: $-1 \leq x \leq 4$ mit 1 cm = 1 Einheit; y-Achse: $-30 \leq y \leq 5$ mit 1 cm = 5 Einheiten)



Die Extremstellen einer Funktion liegen an den Stellen, an denen die Ableitung Nullstellen besitzt.

Hier hat $k'(x)$ die Nullstellen $x = 0$ und $x = 3$. Aus Teilaufgabe b) sieht man, dass bei $x = 3$ tatsächlich ein Extrempunkt vorliegt, bei $x = 0$ dagegen nicht: Dort berührt der Graph von k' die x-Achse nur, ohne das Vorzeichen zu wechseln. Nullstellen der Ableitung sind also notwendige, aber nicht immer hinreichende Bedingungen für Extrempunkte.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**