DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe wMte5Q

Seien die beiden folgenden Funktionen gegeben:
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1.1x^2 + 0.57x + 0.8$
$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 0.4$

a) Ermitteln Sie die Extremstellen beider Funktionen.

$$f'(x) = x^2 - 2.2x + 0.57$$
$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2.2x + 0.57 \\ x_{1/2} &= 1.1 \pm \sqrt{1.1^2 - 0.57} \\ x_1 &= 1.9 \quad \vee \quad x_2 = 0.3 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $g'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 6x + 3 \quad | :3 \\ &= x^2 - 2x + 1 \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - 1} \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

b) Geben Sie eine begründete Vermutung ab, ob es sich an den Extremstellen jeweils um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt.

Da es sich bei $f(x)$ um eine Funktion dritten Grades mit positivem Leitkoeffizienten handelt, verläuft der Graph von links unten nach rechts oben. Daher liegt es nahe, dass die kleinere Extremstelle $x = 0.3$ ein Hochpunkt und die größere Extremstelle $x = 1.9$ ein Tiefpunkt ist.

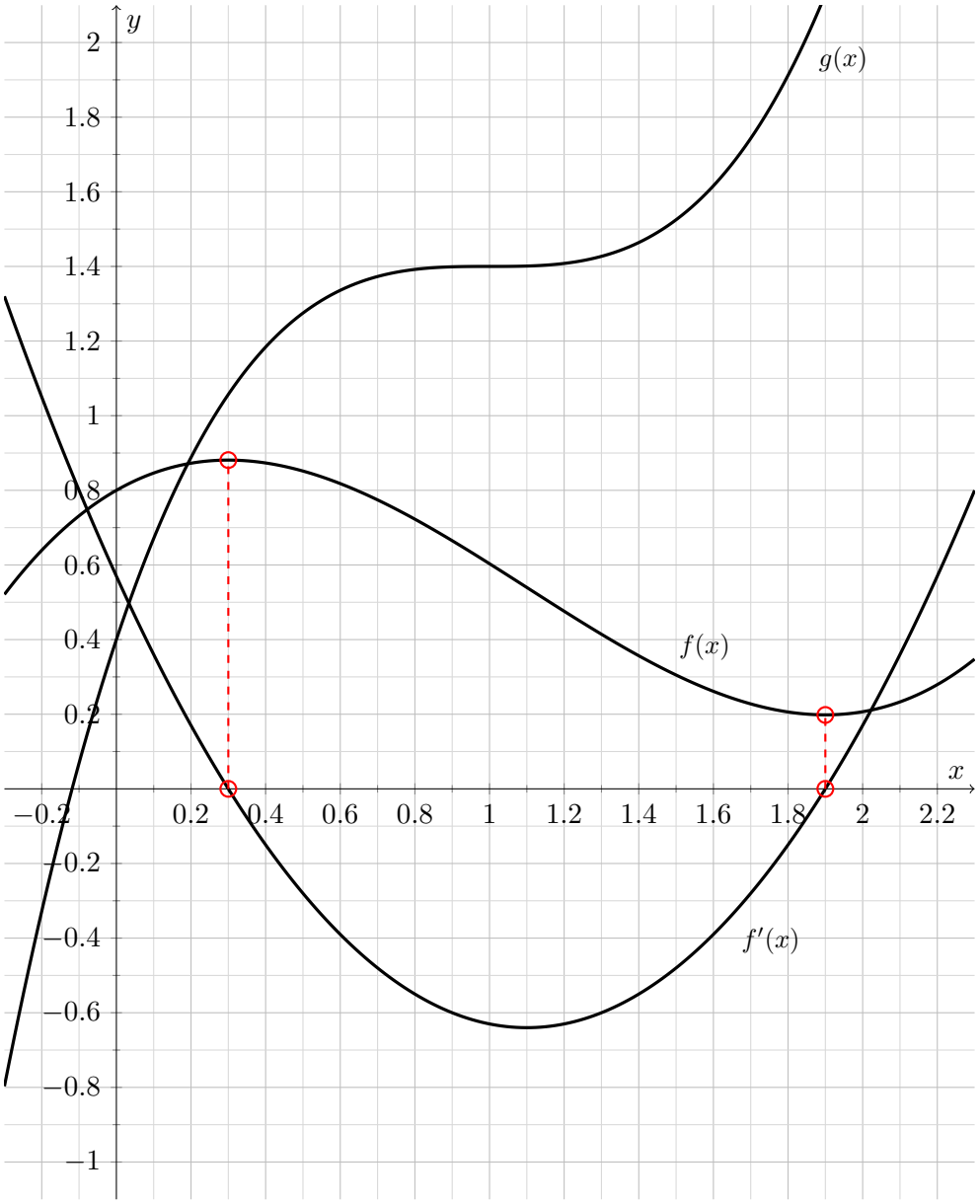
Ähnliches gilt zunächst auch für $g(x)$, da ebenfalls eine Funktion dritten Grades mit positivem Leitkoeffizienten vorliegt. Allerdings „fehlt“ hier eine zweite Extremstelle. Deshalb kann vermutet werden, dass es sich bei $x = 1$ nicht um einen Hoch- oder Tiefpunkt, sondern um einen Sattelpunkt handelt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Zeichnen Sie beide Funktionen in das folgende Koordinatensystem. Verwenden Sie dazu die Tabellenfunktion des Taschenrechners mit Startwert -0.2, Endwert 2.2 und Schrittweite 0.2.

$\boldsymbol{x}$	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\boldsymbol{f(x)}$	0.64	0.8	0.87	0.87	0.82	0.72	0.6
$\boldsymbol{g(x)}$	-0.33	0.4	0.89	1.18	1.34	1.39	1.4

$\boldsymbol{x}$	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2
$\boldsymbol{f(x)}$	0.48	0.36	0.26	0.21	0.21	0.28
$\boldsymbol{g(x)}$	1.41	1.46	1.62	1.91	2.4	3.13



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Überprüfen Sie mithilfe der Zeichnung, welche der in a) gefundenen Extremstellen tatsächlich Hoch- bzw. Tiefpunkte sind.

Bei $f(x)$ ist $x = 0.3$ tatsächlich ein Hochpunkt und $x = 1.9$ ein Tiefpunkt.

Bei $g(x)$ liegt bei $x = 1$ weder ein Hochpunkt noch ein Tiefpunkt vor. Der Graph besitzt dort nur eine waagerechte Tangente.

e) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x)$ die erste Ableitung $f'(x)$ und zeichnen Sie diese Ableitungsfunktion ebenfalls in das Koordinatensystem ein.

$$f'(x) = x^2 - 2.2x + 0.57$$

Zeichnung: siehe Teilaufgabe c).

f) Zeichnen Sie bei $f(x)$ jeweils eine senkrechte gestrichelte Linie vom Hoch- bzw. Tiefpunkt bis zur x-Achse. Was fällt Ihnen auf?

Zeichnung: siehe Teilaufgabe c).

An den Extremstellen von $f(x)$ hat die Ableitung jeweils eine Nullstelle.

g) Geben Sie zunächst die zweite Ableitung $f''(x)$ an und bestimmen Sie anschließend die Funktionswerte der zweiten Ableitung an den Extremstellen $x = 0.3$ und $x = 1.9$.

$$f''(x) = 2x - 2.2$$
$$f''(0.3) = 2 \cdot 0.3 - 2.2 = -1.6$$
$$f''(1.9) = 2 \cdot 1.9 - 2.2 = 1.6$$

Am Hochpunkt ($x = 0.3$) ist der Wert der zweiten Ableitung negativ, am Tiefpunkt ($x = 1.9$) positiv.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**