DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe varQdk

Eine kleine Firma fertigt Mountainbikes. Unabhängig von der Stückzahl fallen monatlich Fixkosten von 5 000 Euro an. Zusätzlich entstehen variable Kosten $V(x)$ (in Euro), die von der produzierten Anzahl x abhängen. Für einige Produktionsmengen liegen folgende Werte vor:

x	0	2	6	10
$V(x)$	0	306	954	1650

a) Bestimmen Sie mithilfe der Tabelle eine ganzrationale Funktion zweiten Grades $V(x)$, die die variablen Kosten beschreibt. Stellen Sie anschließend die monatlichen Herstellungskosten $K(x)$ (Fixkosten plus variable Kosten) in Abhängigkeit von x auf. Skizzieren Sie den Graphen von K für $0 \leq x \leq 200$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Ermitteln Sie außerdem die Produktionsmenge, bei der die variablen Kosten fünfmal so hoch sind wie die Fixkosten.

$$V(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned}
V(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad = c \quad \Rightarrow c = 0 \\
V(2) = 306 \quad &\Rightarrow \quad 306 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 \quad = 4a + 2b \\
V(6) = 954 \quad &\Rightarrow \quad 954 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 \quad = 36a + 6b
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 306 \\ 36 & 6 & 954 \end{array}\right) \qquad \text{II} - 9 \cdot \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 306 \\ 0 & -12 & -1800 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{II} \quad & -12b = -1800 \qquad | :(-12) \\
& b = 150
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad & 4a + 2 \cdot 150 = 306 \quad | -300 \\
& 4a = 6 \qquad\qquad\quad | :4 \\
& a = 1.5 \\
& \Rightarrow V(x) = 1.5x^2 + 150x
\end{aligned}$$

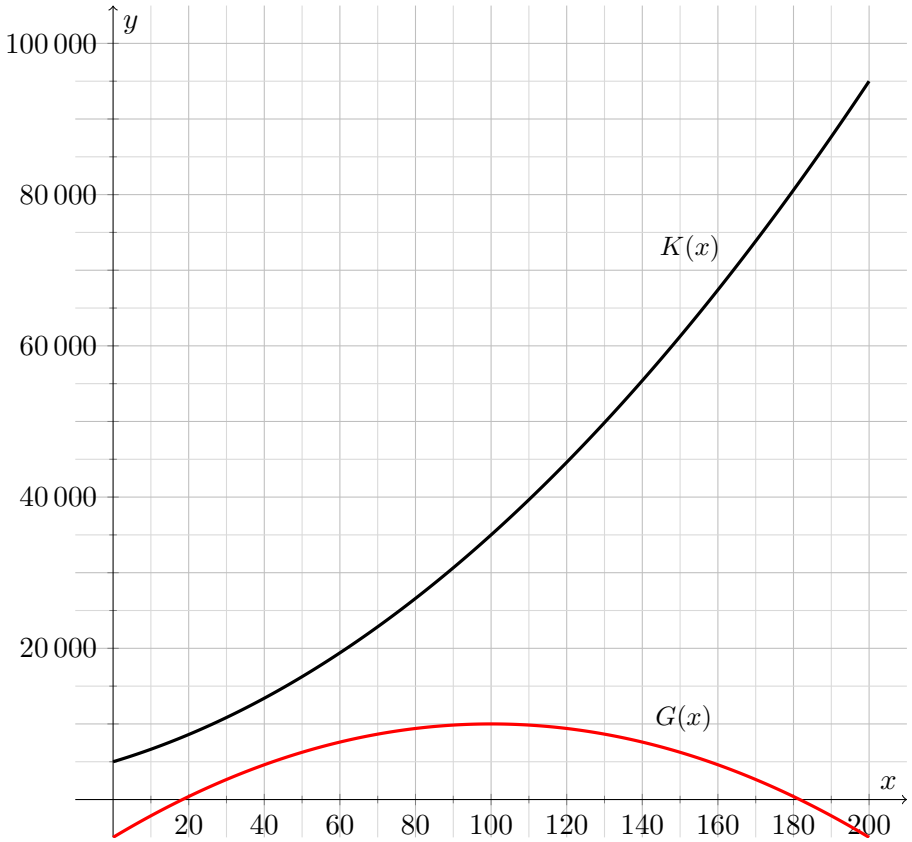
Probe mit dem Tabellenwert $x = 10$:

$$V(10) = 1.5 \cdot 10^2 + 150 \cdot 10 = 1650 \quad \checkmark$$

Die monatlichen Herstellungskosten sind Fixkosten plus variable Kosten:

$$\begin{aligned}
K(x) &= V(x) + 5000 \\
&= 1.5x^2 + 150x + 5000
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**



Produktionsmenge, bei der die variablen Kosten fünfmal so hoch sind wie die Fixkosten:

$$
\begin{aligned}
V(x) &= 5 \cdot 5000 \\
1.5x^2 + 150x &= 25000 && \mid -25000 \\
1.5x^2 + 150x - 25000 &= 0 && \mid :1.5 \\
x^2 + 100x - \frac{50000}{3} &= 0 \\
x_{1/2} &= -50 \pm \sqrt{50^2 + \frac{50000}{3}} \\
x_1 \approx 88.444 \quad &\vee \quad x_2 \approx -188.444
\end{aligned}
$$

Nur der positive Wert ist im Sachzusammenhang sinnvoll. Bei einer Produktionsmenge von etwa 88 Mountainbikes sind die variablen Kosten fünfmal so hoch wie die Fixkosten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Alle im Monat produzierten Mountainbikes werden für 450 Euro pro Stück an einen Händler verkauft. Stellen Sie die Gewinnfunktion $G(x)$ in Abhängigkeit von x auf und zeichnen Sie den Graphen von G in das vorhandene Koordinatensystem. Bestimmen Sie, für welche Produktionsmengen Gewinn entsteht, und berechnen Sie den maximalen Monatsgewinn.

$$\begin{aligned} E(x) &= 450x \\ G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= 450x - (1.5x^2 + 150x + 5000) \\ &= 450x - 1.5x^2 - 150x - 5000 \\ &= -1.5x^2 + 300x - 5000 \end{aligned}$$

Graph von G: siehe Koordinatensystem in a).

Gewinn entsteht für $G(x) > 0$. Dazu werden zunächst die Nullstellen bestimmt:

$$\begin{aligned} 0 &= -1.5x^2 + 300x - 5000 \qquad | :(-1.5) \\ &= x^2 - 200x + \frac{10000}{3} \\ x_{1/2} &= 100 \pm \sqrt{100^2 - \frac{10000}{3}} \\ x_1 &\approx 181.65 \quad \vee \quad x_2 \approx 18.35 \end{aligned}$$

Gewinn entsteht bei Produktionsmengen von 19 bis 181 Stück.

Maximaler Gewinn (alternativ über die Scheitelpunktform):

$$\begin{aligned} G'(x) &= -3x + 300 \\ G''(x) &= -3 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $G'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -3x + 300 \quad | +3x \\ 3x &= 300 \quad | :3 \\ x &= 100 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $G'(x) = 0 \quad \wedge \quad G''(x) \neq 0$

$$G''(100) = -3 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $G(x) = y$

$$G(100) = -1.5 \cdot 100^2 + 300 \cdot 100 - 5000 = 10000 \qquad \Rightarrow \text{HP}(100 \mid 10000)$$

Bei 100 Mountainbikes entsteht der maximale Monatsgewinn von 10 000 Euro.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Aufgrund starker Konkurrenz muss der Verkaufspreis pro Mountainbike gesenkt werden. Um wie viel Prozent darf der ursprüngliche Preis höchstens reduziert werden, wenn monatlich 90 Mountainbikes produziert werden und der Gewinn dabei mindestens 2 000 Euro betragen soll?

p: reduzierter Verkaufspreis pro Mountainbike in Euro

$$\begin{aligned} E(x) &= px \\ G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= px - (1.5x^2 + 150x + 5000) \\ &= px - 1.5x^2 - 150x - 5000 \\ &= -1.5x^2 + (p - 150)x - 5000 \end{aligned}$$

Bei $x = 90$ soll der Gewinn mindestens 2000 Euro betragen:

$$\begin{aligned} G(90) &\geq 2000 \\ -1.5 \cdot 90^2 + (p - 150) \cdot 90 - 5000 &\geq 2000 && \mid \text{zusammenfassen} \\ (p - 150) \cdot 90 - 17150 &\geq 2000 && \mid +17150 \\ (p - 150) \cdot 90 &\geq 19150 && \mid :90 \\ p - 150 &\geq 212.778 && \mid +150 \\ p &\geq 362.778 \end{aligned}$$

Reduzierung in Prozent:

$$\frac{450 - 362.778}{450} \cdot 100 \approx 19.383$$

Der ursprüngliche Preis darf höchstens um etwa 19.38 % reduziert werden.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**