DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe vVpuuY

Für jede Funktion ist der geometrische Flächeninhalt im Intervall zwischen der kleinsten und größten Nullstelle zu bestimmen. Zusätzlich berechnen Sie über dasselbe Intervall auch die orientierte Fläche, um beide Ergebnisse miteinander zu vergleichen.
Tipp: Bei manchen Funktionen hilft Symmetrie für eine einfachere Berechnung.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + x^2 - 6x \\ &= x(x^2 + x - 6) \qquad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + x - 6 \\ x_{2/3} &= -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -3 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -3, 0 und 2.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-3}^{0} \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-3)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2\right) \\ &= 0 - \left(-\frac{63}{4}\right) \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{0}^{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 0 \\ &= -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_G &= |A_1| + |A_2| \\ &= \left|\frac{63}{4}\right| + \left|-\frac{16}{3}\right| \\ &= \frac{63}{4} + \frac{16}{3} \\ &= \frac{253}{12} \approx 21.083 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$
\begin{aligned}
A_O &= \int_{-3}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-3}^{2} \\
&= \frac{1}{4}\cdot 2^4 + \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4 + \frac{1}{3}\cdot(-3)^3 - 3\cdot(-3)^2\right) \\
&= -\frac{16}{3} - \left(-\frac{63}{4}\right) \\
&= \frac{125}{12} \approx 10.417
\end{aligned}
$$

Vergleich: Die orientierte Fläche $A_O \approx 10.417$ ist betragsmäßig kleiner als der Flächeninhalt $A_G \approx 21.083$, weil beim Integral die Teilflächen unterhalb der x-Achse negativ zählen und sich mit denen oberhalb teilweise aufheben.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 4x$

$$\begin{aligned} 0 &= -2x^3 - 2x^2 + 4x \\ &= x(-2x^2 - 2x + 4) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -2x^2 - 2x + 4 \qquad | \, :(-2) \\ &= x^2 + x - 2 \\ x_{2/3} &= -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 2} \\ x_2 &= 1 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -2, 0 und 1.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{0} (-2x^3 - 2x^2 + 4x)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_{-2}^{0} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{2} \cdot (-2)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 \right) \\ &= 0 - \frac{16}{3} \\ &= -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{1} (-2x^3 - 2x^2 + 4x)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_{0}^{1} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 1^4 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 0 \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_G &= |A_1| + |A_2| \\ &= \left| -\frac{16}{3} \right| + \left| \frac{5}{6} \right| \\ &= \frac{16}{3} + \frac{5}{6} \\ &= \frac{37}{6} \approx 6.167 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$
\begin{aligned}
A_O &= \int_{-2}^{1} (-2x^3 - 2x^2 + 4x)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_{-2}^{1} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot 1^4 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 + 2\cdot 1^2 - \left(-\frac{1}{2}\cdot (-2)^4 - \frac{2}{3}\cdot (-2)^3 + 2\cdot (-2)^2\right) \\
&= \frac{5}{6} - \frac{16}{3} \\
&= -\frac{9}{2} = -4.5
\end{aligned}
$$

Vergleich: Die orientierte Fläche $A_O = -4.5$ ist betragsmäßig kleiner als der Flächeninhalt $A_G \approx 6.167$, weil beim Integral die Teilflächen unterhalb der x-Achse negativ zählen und sich mit denen oberhalb teilweise aufheben.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$$\begin{aligned}
0 &= x^4 - 5x^2 + 4 && | \; x^2 = z \\
&= z^2 - 5z + 4 \\
z_{1/2} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4} \\
z_1 = 4 \quad &\vee \quad z_2 = 1 && | \; x = \sqrt{z} \\
x_1 = 2 \quad &\vee \quad x_2 = -2 \quad \vee \quad x_3 = 1 \quad \vee \quad x_4 = -1
\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -2, -1, 1 und 2.

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, genügt es, die Teilflächen von 0 bis 2 zu berechnen und zu verdoppeln:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{5}{3} \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 - 0 \\
&= \frac{38}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{5}{3} \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 - \left(\frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{5}{3} \cdot 1^3 + 4 \cdot 1\right) \\
&= \frac{16}{15} - \frac{38}{15} \\
&= -\frac{22}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_G &= 2 \cdot (|A_1| + |A_2|) \\
&= 2 \cdot \left(\left|\frac{38}{15}\right| + \left|-\frac{22}{15}\right|\right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{38}{15} + \frac{22}{15}\right) \\
&= 2 \cdot 4 \\
&= 8
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}
A_O &= \int_{-2}^{2} (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{2} (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx \\
&= 2\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_0^2 \\
&= 2\left(\frac{1}{5}\cdot 2^5 - \frac{5}{3}\cdot 2^3 + 4\cdot 2 - 0\right) \\
&= 2\cdot\frac{16}{15} \\
&= \frac{32}{15} \approx 2.133
\end{aligned}$$

Vergleich: Die orientierte Fläche $A_O \approx 2.133$ ist betragsmäßig kleiner als der Flächeninhalt $A_G = 8$, weil beim Integral die Teilflächen unterhalb der x-Achse negativ zählen und sich mit denen oberhalb teilweise aufheben.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

$$0 = x^3 + 3x^2 - 10x - 24 \quad | \, x_1 = 3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -10 & -24 \\ 3 & & 3 & 18 & 24 \\ \hline & 1 & 6 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow q(x) = x^2 + 6x + 8$$

$$0 = x^2 + 6x + 8$$

$$x_{2/3} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 8}$$

$$x_2 = -2 \quad \vee \quad x_3 = -4$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -4, -2 und 3.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-4}^{-2} (x^3 + 3x^2 - 10x - 24)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 5x^2 - 24x\right]_{-4}^{-2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 24 \cdot (-2) \\ &\quad - \left(\frac{1}{4} \cdot (-4)^4 + (-4)^3 - 5 \cdot (-4)^2 - 24 \cdot (-4)\right) \\ &= 24 - 16 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{-2}^{3} (x^3 + 3x^2 - 10x - 24)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 5x^2 - 24x\right]_{-2}^{3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 3^4 + 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 24 \cdot (-2)\right) \\ &= -\frac{279}{4} - 24 \\ &= -\frac{375}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_G &= |A_1| + |A_2| \\ &= |8| + \left|-\frac{375}{4}\right| \\ &= 8 + \frac{375}{4} \\ &= \frac{407}{4} = 101.75 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$
\begin{aligned}
A_O &= \int_{-4}^{3} (x^3 + 3x^2 - 10x - 24)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 5x^2 - 24x\right]_{-4}^{3} \\
&= \frac{1}{4} \cdot 3^4 + 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 \\
&\quad - \left(\frac{1}{4} \cdot (-4)^4 + (-4)^3 - 5 \cdot (-4)^2 - 24 \cdot (-4)\right) \\
&= -\frac{279}{4} - 16 \\
&= -\frac{343}{4} = -85.75
\end{aligned}
$$

Vergleich: Die orientierte Fläche $A_O = -85.75$ ist betragsmäßig kleiner als der Flächeninhalt $A_G = 101.75$, weil beim Integral die Teilflächen unterhalb der x-Achse negativ zählen und sich mit denen oberhalb teilweise aufheben.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 7x - 10$

$$\begin{aligned}
0 &= -x^3 + 4x^2 + 7x - 10 \quad | \, x_1 = 1 \\
&\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 4 & 7 & -10 \\ 1 & & -1 & 3 & 10 \\ \hline & -1 & 3 & 10 & 0 \end{array} \\
\Rightarrow q(x) &= -x^2 + 3x + 10 \\
0 &= -x^2 + 3x + 10 \qquad | \, :(-1) \\
&= x^2 - 3x - 10 \\
x_{2/3} &= 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 + 10} \\
x_2 = 5 \quad &\vee \quad x_3 = -2
\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -2, 1 und 5.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^{1} (-x^3 + 4x^2 + 7x - 10)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 10x \right]_{-2}^{1} \\
&= -\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{4}{3} \cdot 1^3 + \frac{7}{2} \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{7}{2} \cdot (-2)^2 - 10 \cdot (-2) \right) \\
&= -\frac{65}{12} - \frac{58}{3} \\
&= -\frac{99}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{1}^{5} (-x^3 + 4x^2 + 7x - 10)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 10x \right]_{1}^{5} \\
&= -\frac{1}{4} \cdot 5^4 + \frac{4}{3} \cdot 5^3 + \frac{7}{2} \cdot 5^2 - 10 \cdot 5 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{4}{3} \cdot 1^3 + \frac{7}{2} \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 \right) \\
&= \frac{575}{12} - \left(-\frac{65}{12} \right) \\
&= \frac{160}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_G &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left| -\frac{99}{4} \right| + \left| \frac{160}{3} \right| \\
&= \frac{99}{4} + \frac{160}{3} \\
&= \frac{937}{12} \approx 78.083
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$
\begin{aligned}
A_O &= \int_{-2}^{5} (-x^3 + 4x^2 + 7x - 10)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 10x \right]_{-2}^{5} \\
&= -\frac{1}{4} \cdot 5^4 + \frac{4}{3} \cdot 5^3 + \frac{7}{2} \cdot 5^2 - 10 \cdot 5 - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{7}{2} \cdot (-2)^2 - 10 \cdot (-2) \right) \\
&= \frac{575}{12} - \frac{58}{3} \\
&= \frac{343}{12} \approx 28.583
\end{aligned}
$$

Vergleich: Die orientierte Fläche $A_O \approx 28.583$ ist betragsmäßig kleiner als der Flächeninhalt $A_G \approx 78.083$, weil beim Integral die Teilflächen unterhalb der x-Achse negativ zählen und sich mit denen oberhalb teilweise aufheben.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = x^4 - 4.25x^2 + 1$

$$\begin{aligned}
0 &= x^4 - 4.25x^2 + 1 && | \; x^2 = z \\
&= z^2 - 4.25z + 1 \\
z_{1/2} &= 2.125 \pm \sqrt{2.125^2 - 1} \\
z_1 &= 4 \quad \vee \quad z_2 = 0.25 && | \; x = \sqrt{z} \\
x_1 &= 2 \quad \vee \quad x_2 = -2 \quad \vee \quad x_3 = 0.5 \quad \vee \quad x_4 = -0.5
\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -2, -0.5, 0.5 und 2.

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, genügt es, die Teilflächen von 0 bis 2 zu berechnen und zu verdoppeln:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^{0.5} (x^4 - 4.25x^2 + 1)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{17}{12}x^3 + x\right]_0^{0.5} \\
&= \frac{1}{5} \cdot 0.5^5 - \frac{17}{12} \cdot 0.5^3 + 0.5 - 0 \\
&= \frac{79}{240}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{0.5}^{2} (x^4 - 4.25x^2 + 1)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{17}{12}x^3 + x\right]_{0.5}^{2} \\
&= \frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{17}{12} \cdot 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{5} \cdot 0.5^5 - \frac{17}{12} \cdot 0.5^3 + 0.5\right) \\
&= -\frac{44}{15} - \frac{79}{240} \\
&= -\frac{261}{80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_G &= 2 \cdot (|A_1| + |A_2|) \\
&= 2 \cdot \left(\left|\frac{79}{240}\right| + \left|-\frac{261}{80}\right|\right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{79}{240} + \frac{261}{80}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{431}{120} \\
&= \frac{431}{60} \approx 7.183
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}
A_O &= \int_{-2}^{2} (x^4 - 4.25x^2 + 1)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{2} (x^4 - 4.25x^2 + 1)\,dx \\
&= 2\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{17}{12}x^3 + x\right]_0^2 \\
&= 2\left(\frac{1}{5}\cdot 2^5 - \frac{17}{12}\cdot 2^3 + 2 - 0\right) \\
&= 2\cdot\left(-\frac{44}{15}\right) \\
&= -\frac{88}{15} \approx -5.867
\end{aligned}$$

Vergleich: Die orientierte Fläche $A_O \approx -5.867$ ist betragsmäßig kleiner als der Flächeninhalt $A_G \approx 7.183$, weil beim Integral die Teilflächen unterhalb der x-Achse negativ zählen und sich mit denen oberhalb teilweise aufheben.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = 0.5x^5 - 2.5x^3 + 2x$

$$\begin{aligned}
0 &= 0.5x^5 - 2.5x^3 + 2x \\
&= x(0.5x^4 - 2.5x^2 + 2) && | \; x_1 = 0 \\
\\
0 &= 0.5x^4 - 2.5x^2 + 2 && | \; :0.5 \\
&= x^4 - 5x^2 + 4 && | \; x^2 = z \\
&= z^2 - 5z + 4 \\
z_{1/2} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4} \\
z_1 = 4 \quad &\vee \quad z_2 = 1 && | \; x = \sqrt{z} \\
x_2 = 2 \quad &\vee \quad x_3 = -2 \quad \vee \quad x_4 = 1 \quad \vee \quad x_5 = -1
\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -2, -1, 0, 1 und 2.

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, genügt es, die Teilflächen von 0 bis 2 zu berechnen und zu verdoppeln:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 (0.5x^5 - 2.5x^3 + 2x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{12}x^6 - \frac{5}{8}x^4 + x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{12} \cdot 1^6 - \frac{5}{8} \cdot 1^4 + 1^2 - 0 \\
&= \frac{11}{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^2 (0.5x^5 - 2.5x^3 + 2x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{12}x^6 - \frac{5}{8}x^4 + x^2\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{12} \cdot 2^6 - \frac{5}{8} \cdot 2^4 + 2^2 - \left(\frac{1}{12} \cdot 1^6 - \frac{5}{8} \cdot 1^4 + 1^2\right) \\
&= -\frac{2}{3} - \frac{11}{24} \\
&= -\frac{9}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_G &= 2 \cdot (|A_1| + |A_2|) \\
&= 2 \cdot \left(\left|\frac{11}{24}\right| + \left|-\frac{9}{8}\right|\right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{11}{24} + \frac{9}{8}\right) \\
&= 2 \cdot \frac{19}{12} \\
&= \frac{19}{6} \approx 3.167
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, heben sich die Teilflächen links und rechts der y-Achse beim Integral auf:

$$\begin{aligned}
A_O &= \int_{-2}^{2} (0.5x^5 - 2.5x^3 + 2x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{12}x^6 - \frac{5}{8}x^4 + x^2\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{1}{12}\cdot 2^6 - \frac{5}{8}\cdot 2^4 + 2^2 - \left(\frac{1}{12}\cdot(-2)^6 - \frac{5}{8}\cdot(-2)^4 + (-2)^2\right) \\
&= -\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vergleich: Die orientierte Fläche ist $A_O = 0$, der Flächeninhalt aber $A_G \approx 3.167$. Die Teilflächen oberhalb und unterhalb der x-Achse sind gleich groß und heben sich beim Integral vollständig auf.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) $f(x) = 0.5x^4 - 5x^2 + 4.5$

$$\begin{aligned}
0 &= 0.5x^4 - 5x^2 + 4.5 && | :0.5\\
&= x^4 - 10x^2 + 9 && | x^2 = z\\
&= z^2 - 10z + 9\\
z_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - 9}\\
z_1 = 9 \quad &\vee \quad z_2 = 1 && | x = \sqrt{z}\\
x_1 = 3 \quad &\vee \quad x_2 = -3 \quad \vee \quad x_3 = 1 \quad \vee \quad x_4 = -1
\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -3, -1, 1 und 3.

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, genügt es, die Teilflächen von 0 bis 3 zu berechnen und zu verdoppeln:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 (0.5x^4 - 5x^2 + 4.5)\,dx\\
&= \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4.5x\right]_0^1\\
&= \frac{1}{10} \cdot 1^5 - \frac{5}{3} \cdot 1^3 + 4.5 \cdot 1 - 0\\
&= \frac{44}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^3 (0.5x^4 - 5x^2 + 4.5)\,dx\\
&= \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4.5x\right]_1^3\\
&= \frac{1}{10} \cdot 3^5 - \frac{5}{3} \cdot 3^3 + 4.5 \cdot 3 - \left(\frac{1}{10} \cdot 1^5 - \frac{5}{3} \cdot 1^3 + 4.5 \cdot 1\right)\\
&= -\frac{36}{5} - \frac{44}{15}\\
&= -\frac{152}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_G &= 2 \cdot (|A_1| + |A_2|)\\
&= 2 \cdot \left(\left|\frac{44}{15}\right| + \left|-\frac{152}{15}\right|\right)\\
&= 2 \cdot \left(\frac{44}{15} + \frac{152}{15}\right)\\
&= 2 \cdot \frac{196}{15}\\
&= \frac{392}{15} \approx 26.133
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}
A_O &= \int_{-3}^{3} (0.5x^4 - 5x^2 + 4.5)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{3} (0.5x^4 - 5x^2 + 4.5)\,dx \\
&= 2\left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4.5x\right]_0^3 \\
&= 2\left(\frac{1}{10}\cdot 3^5 - \frac{5}{3}\cdot 3^3 + 4.5\cdot 3 - 0\right) \\
&= 2\cdot\left(-\frac{36}{5}\right) \\
&= -\frac{72}{5} = -14.4
\end{aligned}$$

Vergleich: Die orientierte Fläche $A_O = -14.4$ ist betragsmäßig kleiner als der Flächeninhalt $A_G \approx 26.133$, weil beim Integral die Teilflächen unterhalb der x-Achse negativ zählen und sich mit denen oberhalb teilweise aufheben.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i) $f(x) = x^3 - 9x$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 9x \\ &= x(x^2 - 9) && | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 && | \, +9 \\ x^2 &= 9 && | \, \sqrt{} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -3 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind der Größe nach -3, 0 und 3.

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, genügt es, die Teilflächen von 0 bis 3 zu berechnen und zu verdoppeln:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^3 (x^3 - 9x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 3^4 - \frac{9}{2} \cdot 3^2 - 0 \\ &= -\frac{81}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_G &= 2 \cdot |A_1| \\ &= 2 \cdot \left|-\frac{81}{4}\right| \\ &= \frac{81}{2} = 40.5 \end{aligned}$$

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, heben sich die Teilflächen links und rechts der y-Achse beim Integral auf:

$$\begin{aligned} A_O &= \int_{-3}^3 (x^3 - 9x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^3 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 3^4 - \frac{9}{2} \cdot 3^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-3)^4 - \frac{9}{2} \cdot (-3)^2\right) \\ &= -\frac{81}{4} - \left(-\frac{81}{4}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vergleich: Die orientierte Fläche ist $A_O = 0$, der Flächeninhalt aber $A_G = 40.5$. Die Teilflächen oberhalb und unterhalb der x-Achse sind gleich groß und heben sich beim Integral vollständig auf.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**