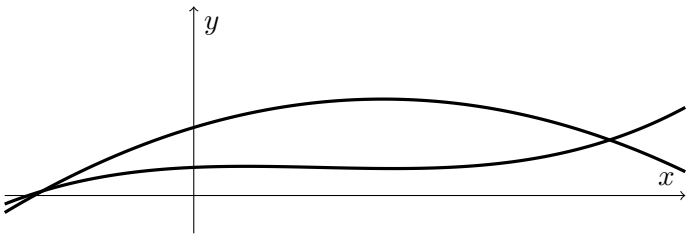
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe vSPQ9N

Die neue Airline AeroLynx entwickelt ein Logo, das bewusst an den Querschnitt einer Tragfläche erinnert: oben leicht gewölbt, unten flacher – wie ein stilisiertes Flügelprofil. Das Logo soll später als einfarbige Fläche auf Leitwerk, Tragflächenverkleidung und Werbematerialien gedruckt werden. Damit die Form in jeder Größe exakt gleich bleibt, wird die Kontur mathematisch beschrieben.
In einem Koordinatensystem steht x für die horizontale Position entlang des Logos (z. B. in cm) und y für die Höhe der Kontur (ebenfalls z. B. in cm).
Die Oberseite des Profils wird modelliert durch

$$f(x) = -0.03x^2 + 0.3x + 1.8$$

und die Unterseite durch

$$g(x) = 0.002x^3 - 0.02x^2 + 0.044x + 0.744.$$



Die gefüllte Logoform entsteht als Fläche zwischen den beiden Kurven. Betrachtet wird dabei genau der Bereich, in dem das Profil „geschlossen“ ist – also das Intervall zwischen den beiden für den Kontext wichtigen Schnittpunkten der Funktionen f und g.

Beziehen Sie sich für die folgenden Aufgaben auf die Situationsbeschreibung.

a) Damit das Logo als geschlossene Fläche gedruckt werden kann, muss zuerst festgelegt werden, wo Ober- und Unterkante zusammenlaufen. Bestimmen Sie die Schnittstellen der beiden Funktionen und geben Sie das Intervall $[a; b]$ zwischen ihnen an.

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -0.03x^2 + 0.3x + 1.8 - (0.002x^3 - 0.02x^2 + 0.044x + 0.744) \\ &= -0.03x^2 + 0.3x + 1.8 - 0.002x^3 + 0.02x^2 - 0.044x - 0.744 \\ &= -0.002x^3 - 0.01x^2 + 0.256x + 1.056 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.002x^3 - 0.01x^2 + 0.256x + 1.056 && \mid :(-0.002) \\ &= x^3 + 5x^2 - 128x - 528 && \mid x_1 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & -128 & -528 \\ -4 & & -4 & -4 & 528 \\ \hline & 1 & 1 & -132 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 + x - 132$$

$$x_{2/3} = -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 132}$$

$$x_2 = 11 \quad \vee \quad x_3 = -12$$

Die Schnittstelle $x_3 = -12$ gehört nicht mehr zur dargestellten Logoform. Das geschlossene Profil liegt zwischen $x_1 = -4$ und $x_2 = 11$, also gilt $[a; b] = [-4; 11]$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Für die Produktion ist entscheidend, wie viel Fläche tatsächlich eingefärbt werden muss (Materialverbrauch, Druckkosten). Berechnen Sie den Flächeninhalt der Logoform, also die Fläche zwischen f und g im Intervall $[a;b]$.

Im Intervall $[-4;11]$ liegt keine weitere Schnittstelle, dort gilt $f(x) \geq g(x)$.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-4}^{11} (-0.002x^3 - 0.01x^2 + 0.256x + 1.056)\,dx \\
&= \left[-0.0005x^4 - \frac{1}{300}x^3 + 0.128x^2 + 1.056x\right]_{-4}^{11} \\
&= -0.0005 \cdot 11^4 - \frac{1}{300} \cdot 11^3 + 0.128 \cdot 11^2 + 1.056 \cdot 11 \\
&\quad - \left(-0.0005 \cdot (-4)^4 - \frac{1}{300} \cdot (-4)^3 + 0.128 \cdot (-4)^2 + 1.056 \cdot (-4)\right) \\
&\approx 15.347 - (-2.091) \\
&\approx 17.438
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der Logoform beträgt etwa 17.44 FE, bei Angaben in cm also etwa $17.44\,\text{cm}^2$.

c) Um das Druckbild in jeder Größe realistisch zu halten, soll das Logo an der dicksten Stelle nicht „zu wuchtig“ wirken. Bestimmen Sie die maximale Profildicke $d(x) = f(x) - g(x)$ im Intervall $[a;b]$ und geben Sie an, an welcher Stelle diese maximale Dicke auftritt.

$$\begin{aligned}
d(x) &= -0.002x^3 - 0.01x^2 + 0.256x + 1.056 \\
d'(x) &= -0.006x^2 - 0.02x + 0.256 \\
d''(x) &= -0.012x - 0.02
\end{aligned}$$

notw. Bed.: $d'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= -0.006x^2 - 0.02x + 0.256 \quad | :(-0.006) \\
&= x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{128}{3} \\
x_{1/2} &= -\frac{5}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{128}{3}} \\
x_1 &\approx 5.075 \quad \vee \quad x_2 \approx -8.408
\end{aligned}$$

Davon liegt nur $x_1 \approx 5.075$ im Intervall $[-4;11]$.

hinr. Bed.: $d'(x) = 0 \quad \wedge \quad d''(x) \neq 0$

$$d''(5.075) = -0.012 \cdot 5.075 - 0.02 \approx -0.081 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $d(x) = y$

$$\begin{aligned}
d(5.075) &= -0.002 \cdot 5.075^3 - 0.01 \cdot 5.075^2 + 0.256 \cdot 5.075 + 1.056 \\
&\approx -0.261 - 0.258 + 1.299 + 1.056 \\
&\approx 1.836 \qquad \Rightarrow \text{HP}(5.08 \mid 1.84)
\end{aligned}$$

Die maximale Profildicke beträgt etwa 1.84 (bei Angaben in cm also etwa 1.84 cm) und tritt bei $x \approx 5.075$ auf.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**