DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe v6fVfT

Bestimmen Sie jeweils den geometrischen Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall von der kleinsten bis zur größten Nullstelle.

a) $f(x) = 0.5x^3 - 0.5x^2 - 3x$ mit den Nullstellen $-2,\ 0,\ 3$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^{0} (0.5x^3 - 0.5x^2 - 3x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{0} \\
&= 0 - \left(\frac{1}{8}\cdot(-2)^4 - \frac{1}{6}\cdot(-2)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-2)^2\right) \\
&= 0 - \left(-\frac{8}{3}\right) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{0}^{3} (0.5x^3 - 0.5x^2 - 3x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} \\
&= \frac{1}{8}\cdot 3^4 - \frac{1}{6}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2 - 0 \\
&= -\frac{63}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left|\frac{8}{3}\right| + \left|-\frac{63}{8}\right| \\
&= \frac{8}{3} + \frac{63}{8} \\
&= \frac{253}{24} \approx 10.542
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = -x^3 + 7x - 6$ mit den Nullstellen $-3,\ 1,\ 2$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-3}^{1} (-x^3 + 7x - 6)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 - 6x \right]_{-3}^{1} \\
&= -\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{7}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-3)^4 + \frac{7}{2} \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) \right) \\
&= -\frac{11}{4} - \frac{117}{4} \\
&= -32
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{1}^{2} (-x^3 + 7x - 6)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 - 6x \right]_{1}^{2} \\
&= -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{7}{2} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{7}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 \right) \\
&= -2 - \left(-\frac{11}{4} \right) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= |-32| + \left| \frac{3}{4} \right| \\
&= 32 + \frac{3}{4} \\
&= \frac{131}{4} = 32.75
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ mit den Nullstellen $-1,\ 1,\ 3$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - 1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - (-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)\right) \\
&= \frac{7}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{1}^{3} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{1}^{3} \\
&= \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1\right) \\
&= -\frac{9}{4} - \frac{7}{4} \\
&= -4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= |4| + |-4| \\
&= 4 + 4 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ mit den Nullstellen $-2,\ 1,\ 2$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^{1} (2x^3 - 2x^2 - 8x + 8)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x\right]_{-2}^{1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1^4 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot (-2)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2)\right) \\
&= \frac{23}{6} - \left(-\frac{56}{3}\right) \\
&= \frac{45}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{1}^{2} (2x^3 - 2x^2 - 8x + 8)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x\right]_{1}^{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2^4 - \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^4 - \frac{2}{3} \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1\right) \\
&= \frac{8}{3} - \frac{23}{6} \\
&= -\frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left|\frac{45}{2}\right| + \left|-\frac{7}{6}\right| \\
&= \frac{45}{2} + \frac{7}{6} \\
&= \frac{71}{3} \approx 23.667
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = -0.5x^3 + 1.5x^2 + 2x - 6$ mit den Nullstellen $-2,\ 2,\ 3$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^{2} (-0.5x^3 + 1.5x^2 + 2x - 6)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 6x \right]_{-2}^{2} \\
&= -\frac{1}{8} \cdot 2^4 + \frac{1}{2} \cdot 2^3 + 2^2 - 6 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{8} \cdot (-2)^4 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 6 \cdot (-2) \right) \\
&= -6 - 10 \\
&= -16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{2}^{3} (-0.5x^3 + 1.5x^2 + 2x - 6)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 6x \right]_{2}^{3} \\
&= -\frac{1}{8} \cdot 3^4 + \frac{1}{2} \cdot 3^3 + 3^2 - 6 \cdot 3 - \left(-\frac{1}{8} \cdot 2^4 + \frac{1}{2} \cdot 2^3 + 2^2 - 6 \cdot 2 \right) \\
&= -\frac{45}{8} - (-6) \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= |-16| + \left| \frac{3}{8} \right| \\
&= 16 + \frac{3}{8} \\
&= \frac{131}{8} = 16.375
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ mit den Nullstellen $-3,\ -1,\ 2$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-3}^{-1} (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x\right]_{-3}^{-1} \\
&= \frac{1}{4}\cdot(-1)^4 + \frac{2}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) \\
&\quad - \left(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4 + \frac{2}{3}\cdot(-3)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-3)^2 - 6\cdot(-3)\right) \\
&= \frac{37}{12} - \left(-\frac{9}{4}\right) \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{-1}^{2} (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{1}{4}\cdot 2^4 + \frac{2}{3}\cdot 2^3 - \frac{5}{2}\cdot 2^2 - 6\cdot 2 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 + \frac{2}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1)\right) \\
&= -\frac{38}{3} - \frac{37}{12} \\
&= -\frac{63}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left|\frac{16}{3}\right| + \left|-\frac{63}{4}\right| \\
&= \frac{16}{3} + \frac{63}{4} \\
&= \frac{253}{12} \approx 21.083
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ mit den Nullstellen $-3,\ 0,\ 2$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-3}^{0} \\
&= 0 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4 + \frac{1}{3}\cdot(-3)^3 - 3\cdot(-3)^2\right) \\
&= 0 - \left(-\frac{63}{4}\right) \\
&= \frac{63}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{0}^{2} \\
&= \frac{1}{4}\cdot 2^4 + \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - 0 \\
&= -\frac{16}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left|\frac{63}{4}\right| + \left|-\frac{16}{3}\right| \\
&= \frac{63}{4} + \frac{16}{3} \\
&= \frac{253}{12} \approx 21.083
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**