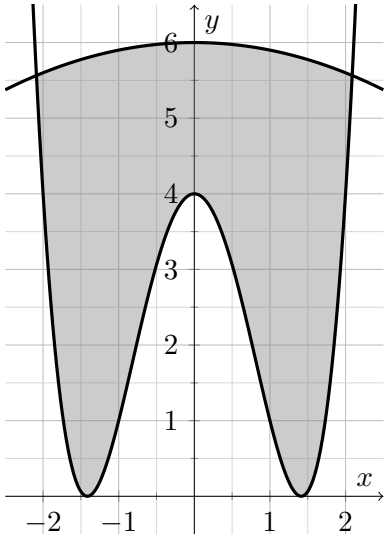
# DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe upPj5r




Das MGhZ Dortmund (Mund-Gesundheits-Zentrum) möchte sich eine sehr stilisierte, riesige Zahn-Skulptur über den Eingang zur Praxis hängen, um potenzielle Patienten auf sich aufmerksam zu machen. Der Querschnitt dieser Skulptur ist rechts abgebildet und entspricht der eingeschlossenen Fläche der Funktionen

$$g(x) = x^4 - 4x^2 + 4 \qquad \text{und} \qquad f(x) = -0.1x^2 + 6$$

mit $x$ und $f(x)$ in Meter.

**a)** Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte der Funktionen.

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -0.1x^2 + 6 - \left(x^4 - 4x^2 + 4\right) \\ &= -0.1x^2 + 6 - x^4 + 4x^2 - 4 \\ &= -x^4 + 3.9x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^4 + 3.9x^2 + 2 && | :(-1) \\ &= x^4 - 3.9x^2 - 2 && | \ x^2 = z \\ &= z^2 - 3.9z - 2 \\ z_{1/2} &= 1.95 \pm \sqrt{1.95^2 + 2} \\ z_1 \approx 4.359 \quad &\vee \quad z_2 \approx -0.459 && | \ x = \sqrt{z} \\ x_1 \approx 2.088 \quad &\vee \quad x_2 \approx -2.088 \end{aligned}$$

Da $z_2 < 0$ ist, ergeben sich daraus keine weiteren Schnittstellen. Die y-Werte werden mit $f(x) = -0.1x^2 + 6$ berechnet:

$$\begin{aligned} f(2.088) &= -0.1 \cdot 2.088^2 + 6 \approx 5.564 && \Rightarrow S_1(2.09 \mid 5.56) \\ f(-2.088) &= -0.1 \cdot (-2.088)^2 + 6 \approx 5.564 && \Rightarrow S_2(-2.09 \mid 5.56) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

**b)** Wie groß ist die Querschnittsfläche der Zahn-Skulptur?

Der Graph von $f$ liegt zwischen den Schnittstellen oberhalb von $g$. Da die Differenzfunktion $d(x) = -x^4 + 3.9x^2 + 2$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}
A &= 2 \cdot \int_0^{2.088} \left(-x^4 + 3.9x^2 + 2\right)\, dx \\
&= 2 \cdot \left[-\frac{1}{5}x^5 + 1.3x^3 + 2x\right]_0^{2.088} \\
&= 2 \cdot \left(-\frac{1}{5} \cdot 2.088^5 + 1.3 \cdot 2.088^3 + 2 \cdot 2.088 - 0\right) \\
&= 2 \cdot (-7.937 + 11.834 + 4.176) \\
&\approx 16.145
\end{aligned}$$

Die Querschnittsfläche der Zahn-Skulptur beträgt ungefähr 16.15 $\text{m}^2$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**