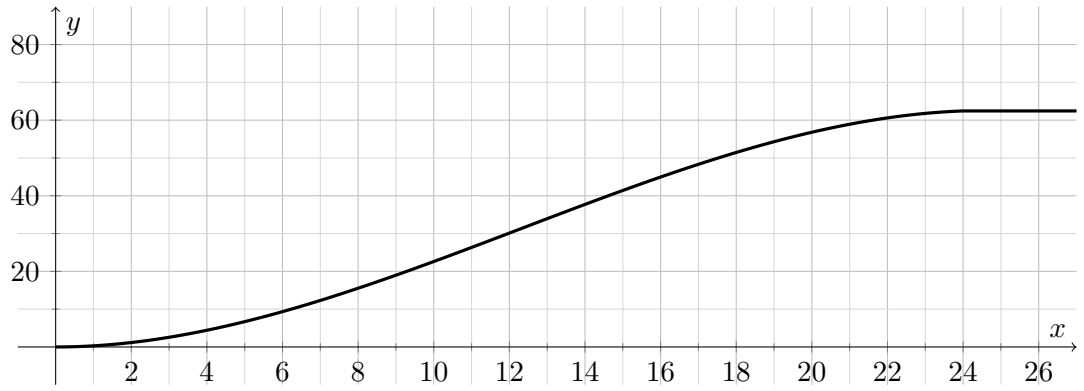
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe uiEWW7

Eine Bakterienkultur in einer Petrischale wird über mehrere Stunden hinweg untersucht. Dabei wird alle zwei Stunden die von den Bakterien bedeckte Fläche gemessen; die Messwerte sind im nebenstehenden Koordinatensystem dargestellt. Zur Beschreibung des Wachstums wird folgende Funktion verwendet:

$$A(t) = -0.0084t^3 + 0.31t^2$$

Dabei ist $A(t)$ die bedeckte Fläche in cm^2 und t die Zeit in Stunden seit Beginn der Beobachtung um 08:00 Uhr ($t = 0$ entspricht 08:00 Uhr, $t = 1$ entspricht 09:00 Uhr usw.).



a) Berechnen Sie die von Bakterien bedeckte Fläche um 05:00 Uhr in der folgenden Nacht.

Von 08:00 Uhr bis 05:00 Uhr der folgenden Nacht vergehen 21 Stunden, also $t = 21$.

$$A(21) = -0.0084 \cdot 21^3 + 0.31 \cdot 21^2 \approx 58.918$$

Um 05:00 Uhr sind etwa $58.92\,\text{cm}^2$ von Bakterien bedeckt.

b) Bestimmen Sie die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienkultur vom Beobachtungsbeginn bis 05:00 Uhr.

$$A(0) = 0$$
$$A(21) \approx 58.918$$
$$m = \frac{A(21) - A(0)}{21 - 0} = \frac{58.918 - 0}{21 - 0} \approx 2.806$$

Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit beträgt etwa $2.81\,\frac{\text{cm}^2}{\text{h}}$. Die bedeckte Fläche nimmt von 08:00 Uhr bis 05:00 Uhr im Mittel um rund $2.81\,\text{cm}^2$ pro Stunde zu.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit wieder genauso groß ist wie zu Beginn der Beobachtung.

$$A'(t) = -0.0252t^2 + 0.62t$$
$$A'(0) = -0.0252 \cdot 0^2 + 0.62 \cdot 0 = 0$$

Gesucht ist der weitere Zeitpunkt mit $A'(t) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -0.0252t^2 + 0.62t \\ &= t(-0.0252t + 0.62) \quad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.0252t + 0.62 \quad | \, +0.0252t \\ 0.0252t &= 0.62 \quad | \, :0.0252 \\ t_2 &\approx 24.603 \end{aligned}$$

Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit ist nach etwa 24.6 Stunden wieder genauso groß wie zu Beginn. Das entspricht ungefähr 08:36 Uhr am folgenden Tag.

d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Bakterienkultur am schnellsten wächst.

$$A'(t) = -0.0252t^2 + 0.62t$$
$$A''(t) = -0.0504t + 0.62$$
$$A'''(t) = -0.0504$$

notw. Bed.: $A''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.0504t + 0.62 \quad | \, +0.0504t \\ 0.0504t &= 0.62 \quad | \, :0.0504 \\ t &\approx 12.302 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $A''(t) = 0 \quad \wedge \quad A'''(t) \neq 0$

$$A'''(12.302) = -0.0504 \neq 0 \qquad \checkmark$$

Da $A'''(12.302) < 0$ ist, hat die Wachstumsgeschwindigkeit A' dort ihr Maximum. Die Bakterienkultur wächst nach etwa 12.3 Stunden am schnellsten. Das entspricht ungefähr 20:18 Uhr.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) Zu welchem Zeitpunkt erreicht die bedeckte Fläche ihren größten Wert?

$$A'(t) = -0.0252t^2 + 0.62t$$
$$A''(t) = -0.0504t + 0.62$$

notw. Bed.: $A'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.0252t^2 + 0.62t \\ &= t(-0.0252t + 0.62) \quad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.0252t + 0.62 \quad | \, +0.0252t \\ 0.0252t &= 0.62 \quad | \, :0.0252 \\ t_2 &\approx 24.603 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $A'(t) = 0 \quad \wedge \quad A''(t) \neq 0$

$$A''(0) = -0.0504 \cdot 0 + 0.62 = 0.62 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$A''(24.603) = -0.0504 \cdot 24.603 + 0.62 \approx -0.62 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $A(t) = y$

$$A(24.603) \approx 62.549 \qquad \Rightarrow \text{HP}(24.6 \mid 62.55)$$

Die bedeckte Fläche erreicht nach etwa 24.6 Stunden mit rund $62.55\,\text{cm}^2$ ihr Maximum. Das entspricht ungefähr 08:36 Uhr am folgenden Tag.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**