DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe uEXw2S

Die elektrische Leistung eines Geräts schwankt über 20 Minuten:

$$P(t) = -0.02t^3 + 0.3t^2 + 1.5t + 20 \qquad (0 \le t \le 20),$$

wobei P in kW angegeben ist.
Für eine vereinfachte Dokumentation soll das wechselnde Leistungsprofil durch eine konstante Leistung ersetzt werden, die im Zeitraum denselben „Gesamteffekt“ hat.

a) Bestimmen Sie die konstante Ersatzleistung.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{20-0}\int_0^{20} (-0.02t^3 + 0.3t^2 + 1.5t + 20)\,dt \\ &= \frac{1}{20}\left[-0.005t^4 + 0.1t^3 + 0.75t^2 + 20t\right]_0^{20} \\ &= \frac{1}{20}\left(-0.005 \cdot 20^4 + 0.1 \cdot 20^3 + 0.75 \cdot 20^2 + 20 \cdot 20 - 0\right) \\ &= \frac{1}{20}(-800 + 800 + 300 + 400) \\ &= \frac{700}{20} = 35 \end{aligned}$$

Die konstante Ersatzleistung beträgt 35 kW.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Vergleichen Sie die Ersatzleistung mit den Werten $P(0)$ und $P(20)$ sowie mit dem maximalen Wert von $P(t)$. Begründen Sie kurz, warum die Ersatzleistung zwischen diesen Werten liegt.

Randwerte:

$$P(0) = -0.02 \cdot 0^3 + 0.3 \cdot 0^2 + 1.5 \cdot 0 + 20 = 20$$
$$P(20) = -0.02 \cdot 20^3 + 0.3 \cdot 20^2 + 1.5 \cdot 20 + 20 = 10$$

Maximaler Wert:

$$P'(t) = -0.06t^2 + 0.6t + 1.5$$
$$P''(t) = -0.12t + 0.6$$

notw. Bed.: $P'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.06t^2 + 0.6t + 1.5 && \mid :(-0.06) \\ &= t^2 - 10t - 25 \\ t_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 + 25} \\ t_1 &\approx 12.071 \quad \vee \quad t_2 \approx -2.071 \end{aligned}$$

Im Intervall $[0; 20]$ ist nur $t \approx 12.071$ relevant.

hinr. Bed.: $P'(t) = 0 \quad \wedge \quad P''(t) \neq 0$

$$P''(12.071) = -0.12 \cdot 12.071 + 0.6 \approx -0.849 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $P(t) = y$

$$\begin{aligned} P(12.071) &= -0.02 \cdot 12.071^3 + 0.3 \cdot 12.071^2 + 1.5 \cdot 12.071 + 20 \\ &\approx 46.642 && \Rightarrow \text{HP}(12.07 \mid 46.64) \end{aligned}$$

Da beide Randwerte kleiner sind, ist $P_{\max} \approx 46.64$ der maximale Wert im Intervall. Damit gilt:

$$P(20) = 10 \quad < \quad P(0) = 20 \quad < \quad m = 35 \quad < \quad P_{\max} \approx 46.64$$

Die Ersatzleistung liegt also über den beiden Randwerten und unter dem maximalen Wert.

Das ist plausibel, weil der Mittelwert die Leistung über den gesamten Zeitraum mittelt. Er kann daher nicht größer als das Maximum sein, liegt hier aber deutlich über den Randwerten, weil die Leistung über weite Teile des Intervalls deutlich höher ist als am Anfang und am Ende.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Für die Abrechnung zählt die insgesamt verbrauchte Energie. Ermitteln Sie den Energieverbrauch im Zeitraum (in kWh) und erklären Sie kurz, warum dabei „Leistung über Zeit aufsummiert“ wird.

Da t in Minuten angegeben ist, liefert das bestimmte Integral zunächst die Einheit $\text{kW} \cdot \text{min}$.

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{20} (-0.02t^3 + 0.3t^2 + 1.5t + 20)\, dt \\ &= \Big[-0.005t^4 + 0.1t^3 + 0.75t^2 + 20t\Big]_0^{20} \\ &= -0.005 \cdot 20^4 + 0.1 \cdot 20^3 + 0.75 \cdot 20^2 + 20 \cdot 20 - 0 \\ &= -800 + 800 + 300 + 400 \\ &= 700 \end{aligned}$$

Das sind $700\,\text{kW} \cdot \text{min}$. Umrechnung in kWh:

$$E = \frac{700}{60}\,\text{kWh} = \frac{35}{3}\,\text{kWh} \approx 11.667\,\text{kWh}$$

Der Energieverbrauch im Zeitraum beträgt rund $11.67\,\text{kWh}$.

Das „Aufsummieren über die Zeit“ ist nötig, weil die Leistung nicht konstant ist. Die Energie ergibt sich deshalb aus der gesamten Fläche unter dem Leistungsgraphen, also aus der über die Zeit addierten Leistung.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**