DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe uEQENZ

Ein Designbüro entwirft eine rotationssymmetrische Glasvase. Der Innenraum der Vase soll über die Höhe möglichst harmonisch verlaufen. Im Modell beschreibt $f(x)$ den Innenradius in cm, x ist die Höhe in cm (vom Boden nach oben).

$$f(x) = -0.01x^3 + 0.18x^2 + 0.6x + 2 \qquad \text{für } 0 \le x \le 18$$

Der Innenraum soll als Rotationskörper interpretiert werden.

a) Ermitteln Sie, wie viele Liter Flüssigkeit die Vase bis zur Höhe 18 cm aufnehmen kann.

$$\begin{aligned}
\text{Nebenrechnung: } f(x)^2 &= (-0.01x^3 + 0.18x^2 + 0.6x + 2)^2 \\
&= (-0.01x^3)^2 + 2 \cdot (-0.01x^3) \cdot 0.18x^2 + 2 \cdot (-0.01x^3) \cdot 0.6x \\
&\quad + 2 \cdot (-0.01x^3) \cdot 2 + (0.18x^2)^2 + 2 \cdot 0.18x^2 \cdot 0.6x \\
&\quad + 2 \cdot 0.18x^2 \cdot 2 + (0.6x)^2 + 2 \cdot 0.6x \cdot 2 + 2^2 \\
&= 0.0001x^6 - 0.0036x^5 - 0.012x^4 - 0.04x^3 \\
&\quad + 0.0324x^4 + 0.216x^3 + 0.72x^2 + 0.36x^2 + 2.4x + 4 \\
&= 0.0001x^6 - 0.0036x^5 + 0.0204x^4 + 0.176x^3 + 1.08x^2 + 2.4x + 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{18} \left(0.0001x^6 - 0.0036x^5 + 0.0204x^4 + 0.176x^3 + 1.08x^2 + 2.4x + 4\right) dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{70000}x^7 - 0.0006x^6 + 0.00408x^5 + 0.044x^4 + 0.36x^3 + 1.2x^2 + 4x\right]_0^{18} \\
&= \pi \left(\frac{1}{70000} \cdot 18^7 - 0.0006 \cdot 18^6 + 0.00408 \cdot 18^5 + 0.044 \cdot 18^4 \right. \\
&\quad \left. + 0.36 \cdot 18^3 + 1.2 \cdot 18^2 + 4 \cdot 18 - 0\right) \\
&\approx \pi \left(8746 - 20407.334 + 7709.437 + 4618.944 + 2099.52 + 388.8 + 72\right) \\
&\approx 3227.367\pi \approx 10139.074
\end{aligned}$$

Da $1\ \text{l} = 1000\ \text{cm}^3$ gilt, folgt $V \approx 10.139$ l. Die Vase kann bis zur Höhe von 18 cm ungefähr 10.14 l Flüssigkeit aufnehmen.

b) Bestimmen Sie den Durchmesser am Boden und den Durchmesser an der Öffnung (bei $x = 18$).

$$\begin{aligned}
f(0) &= -0.01 \cdot 0^3 + 0.18 \cdot 0^2 + 0.6 \cdot 0 + 2 = 2 \\
f(18) &= -0.01 \cdot 18^3 + 0.18 \cdot 18^2 + 0.6 \cdot 18 + 2 = 12.8 \\
d_B &= 2 \cdot 2 = 4 \\
d_O &= 2 \cdot 12.8 = 25.6
\end{aligned}$$

Der Bodendurchmesser beträgt 4 cm, der Durchmesser an der Öffnung beträgt 25.6 cm.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Begründen Sie anhand des Funktionsterms, ob es im betrachteten Bereich eine Stelle gibt, an der die Vase am breitesten ist (und wo diese ungefähr liegt).

Da $f(x)$ den Innenradius beschreibt, ist die Vase dort am breitesten, wo $f(x)$ maximal ist.

$$f'(x) = -0.03x^2 + 0.36x + 0.6$$
$$f''(x) = -0.06x + 0.36$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.03x^2 + 0.36x + 0.6 && \mid :(-0.03) \\ &= x^2 - 12x - 20 \\ x_{1/2} &= 6 \pm \sqrt{6^2 + 20} \\ x_1 &\approx 13.483 \quad \vee \quad x_2 \approx -1.483 \end{aligned}$$

Da nur Werte im Intervall $[0; 18]$ betrachtet werden, ist nur $x_1 \approx 13.483$ relevant.

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(13.483) = -0.06 \cdot 13.483 + 0.36 \approx -0.449 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(13.483) \approx 18.301 \qquad \Rightarrow \text{HP}(13.48 \mid 18.3)$$

Die Randwerte $f(0) = 2$ und $f(18) = 12.8$ sind kleiner. Die Vase ist also in einer Höhe von etwa 13.48 cm am breitesten. Dort beträgt der Innendurchmesser ungefähr $2 \cdot 18.301 \approx 36.6$ cm.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**