DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe tgXxC9

Gesucht ist eine Funktion dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, die ...

- bei $x = 2$ einen Wendepunkt hat,
- und zusätzlich $f(0) = 1$ erfüllt.

a) Stellen Sie eine passende Funktion auf (es gibt viele mögliche Lösungen).

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \quad &= d \\ f''(2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 6a \cdot 2 + 2b \quad &= 12a + 2b \end{aligned}$$

Also gilt $d = 1$ und $b = -6a$ mit $a \neq 0$ (Grad 3). Wählt man z. B. $a = 1$, so folgt $b = -6$. Der Koeffizient c ist frei wählbar, z. B. $c = 13$.

Eine mögliche Funktion ist:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 1$$

b) Berechnen Sie zur Kontrolle die Wendestelle.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 13 \\ f''(x) &= 6x - 12 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 12 \quad &| +12 \\ 6x &= 12 \quad &| :6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

c) Prüfen Sie die hinreichende Bedingung und geben Sie den Wendepunkt an.

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(2) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 13 \cdot 2 + 1 = 11 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(2 \mid 11)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**