DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe syeWx2

Bestimmen Sie jeweils das Rotationsvolumen, das entsteht, wenn die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse im angegebenen Intervall um die x-Achse rotiert. Entscheiden Sie sinnvoll, ob Symmetrie Rechenwege verkürzt.

a) $f(x) = 3 - x^2$ Intervall $[-1; 1]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (3 - x^2)^2 &= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x^2 + (x^2)^2 \\ &= 9 - 6x^2 + x^4 \\ &= x^4 - 6x^2 + 9\end{aligned}$$

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}V &= 2\pi \int_0^1 (x^4 - 6x^2 + 9)\, dx \\ &= 2\pi \left[0.2x^5 - 2x^3 + 9x\right]_0^1 \\ &= 2\pi \left(0.2 \cdot 1^5 - 2 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1 - 0\right) \\ &= 2\pi \cdot 7.2 = 14.4\pi \approx 45.239\end{aligned}$$

b) $f(x) = 0.5x + 2$ Intervall $[-2; 2]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (0.5x + 2)^2 &= (0.5x)^2 + 2 \cdot 0.5x \cdot 2 + 2^2 \\ &= 0.25x^2 + 2x + 4\end{aligned}$$

Die Funktion ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse, daher wird über das ganze Intervall integriert:

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-2}^2 (0.25x^2 + 2x + 4)\, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{12}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-2}^2 \\ &= \pi \left(\frac{1}{12} \cdot 2^3 + 2^2 + 4 \cdot 2 - \left(\frac{1}{12} \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 4 \cdot (-2)\right)\right) \\ &= \pi \left(\frac{38}{3} - \left(-\frac{14}{3}\right)\right) \\ &= \frac{52}{3}\pi \approx 54.454\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = -0.25x^2 + 2x + 4$ Intervall $[0; 4]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (-0.25x^2 + 2x + 4)^2 &= (-0.25x^2 + 2x + 4)(-0.25x^2 + 2x + 4)\\ &= \frac{1}{16}x^4 - 0.5x^3 - x^2 - 0.5x^3 + 4x^2\\ &\quad + 8x - x^2 + 8x + 16\\ &= \frac{1}{16}x^4 - x^3 + 2x^2 + 16x + 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{16}x^4 - x^3 + 2x^2 + 16x + 16\right) dx\\ &= \pi \left[\frac{1}{80}x^5 - 0.25x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 8x^2 + 16x\right]_0^4\\ &= \pi \left(\frac{1}{80} \cdot 4^5 - 0.25 \cdot 4^4 + \frac{2}{3} \cdot 4^3 + 8 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 - 0\right)\\ &= \pi \left(12.8 - 64 + \frac{128}{3} + 128 + 64\right)\\ &= \frac{2752}{15}\pi \approx 576.377\end{aligned}$$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ Intervall $[0; 3]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (x^2 - 2x + 2)^2 &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)\\ &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 2x^2 - 4x + 4\\ &= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^3 (x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4)\, dx\\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + 4x\right]_0^3\\ &= \pi \left(\frac{1}{5} \cdot 3^5 - 3^4 + \frac{8}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 0\right)\\ &= \pi \left(48.6 - 81 + 72 - 36 + 12\right)\\ &= 15.6\pi \approx 49.009\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = 4 - 0.25x^2$ Intervall $[-4; 4]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (4 - 0.25x^2)^2 &= 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 0.25x^2 + (0.25x^2)^2 \\ &= 16 - 2x^2 + \frac{1}{16}x^4 \\ &= \frac{1}{16}x^4 - 2x^2 + 16\end{aligned}$$

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}V &= 2\pi \int_0^4 \left(\frac{1}{16}x^4 - 2x^2 + 16\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{80}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 16x\right]_0^4 \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{80} \cdot 4^5 - \frac{2}{3} \cdot 4^3 + 16 \cdot 4 - 0\right) \\ &= 2\pi \left(12.8 - \frac{128}{3} + 64\right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{512}{15} = \frac{1024}{15}\pi \approx 214.466\end{aligned}$$

f) $f(x) = 0.1x^3 + 1$ Intervall $[0; 3]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (0.1x^3 + 1)^2 &= (0.1x^3)^2 + 2 \cdot 0.1x^3 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 0.01x^6 + 0.2x^3 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^3 (0.01x^6 + 0.2x^3 + 1)\, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{700}x^7 + \frac{1}{20}x^4 + x\right]_0^3 \\ &= \pi \left(\frac{1}{700} \cdot 3^7 + \frac{1}{20} \cdot 3^4 + 3 - 0\right) \\ &= \pi \left(\frac{2187}{700} + \frac{81}{20} + 3\right) \\ &= \frac{3561}{350}\pi \approx 31.963\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**