DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe sEpPQU

Nach einem Starkregenereignis überwacht ein Sensor die Wasserhöhe eines Flusses relativ zu einer Referenzmarke ($f(t) = 0$). Für Einsatzleitung und Anwohner ist wichtig, wie sich der Pegel im Verlauf entwickelt: Wann steigt er besonders schnell, wann wird ein Höchststand erreicht und ab wann entspannt sich die Lage wieder. Im Modell gilt

$$f(t) = -0.01t^3 + 0.12t^2$$

mit $f(t)$ in Metern und t in Stunden nach Beginn des Starkregenereignisses ($0 \le t \le 12$).

a) Bestimmen Sie, wann die Warnmarke mit $f(t) = 2$ erreicht wird, damit bedrohte Stadtteile umgehend evakuiert werden können.

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \\ 2 &= -0.01t^3 + 0.12t^2 && | -2 \\ 0 &= -0.01t^3 + 0.12t^2 - 2 && | :(-0.01) \\ &= t^3 - 12t^2 + 200 && | \, t_1 = 10 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

	1	− 12	0	200
10		10	− 20	− 200
	1	− 2	− 20	0

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - 2t - 20 \\ t_{2/3} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 20} \\ t_2 &\approx 5.583 \quad \vee \quad t_3 \approx -3.583 \end{aligned}$$

Im Intervall $0 \le t \le 12$ liegen nur $t_2 \approx 5.583$ und $t_1 = 10$.

Die Warnmarke wird also nach etwa 5.58 h erstmals erreicht und nach 10 h beim Absinken erneut.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Klären Sie, ob und wann der höchste Pegelstand im betrachteten Zeitraum auftritt, damit entschieden werden kann, wann die Brücke ggf. gesperrt werden muss.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -0.03t^2 + 0.24t \\ f''(t) &= -0.06t + 0.24 \\ f'''(t) &= -0.06 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.03t^2 + 0.24t \\ &= t(-0.03t + 0.24) \quad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.03t + 0.24 \quad | \, +0.03t \\ 0.03t &= 0.24 \quad | \, :0.03 \\ t_2 &= 8 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(t) = 0 \quad \wedge \quad f''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0.24 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(8) &= -0.06 \cdot 8 + 0.24 = -0.24 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(t) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 && \Rightarrow \text{TP}(0 \mid 0) \\ f(8) &= -0.01 \cdot 8^3 + 0.12 \cdot 8^2 = 2.56 && \Rightarrow \text{HP}(8 \mid 2.56) \end{aligned}$$

Am Rand gilt $f(12) = 0$. Der höchste Pegelstand tritt also nach 8 h auf und liegt 2.56 m über der Referenzmarke.

c) Geben Sie die Zeitabschnitte an, in denen der Pegel steigt bzw. fällt, da die Einsatzleitung daraus ableitet, ob weitere Maßnahmen vorbereitet werden müssen oder Entwarnung möglich ist.

Aus b) folgt: Zwischen dem Tiefpunkt bei $t = 0$ und dem Hochpunkt bei $t = 8$ steigt der Pegel, danach fällt er.

Der Pegel steigt also im Zeitraum $0 < t < 8$ und fällt im Zeitraum $8 < t \leq 12$.

d) Für die Planung des Sandsack-Einsatzes ist wichtig, wie schnell der Pegel bei $t = 3$ steigt. Ermitteln Sie diese Änderungsrate und deuten Sie sie als „m pro Stunde“.

$$\begin{aligned} f'(3) &= -0.03 \cdot 3^2 + 0.24 \cdot 3 \\ &= -0.27 + 0.72 \\ &= 0.45 \end{aligned}$$

Die Änderungsrate beträgt bei $t = 3$ also 0.45 $\frac{\text{m}}{\text{h}}$. Das bedeutet: Nach 3 Stunden steigt der Pegel momentan um 0.45 m pro Stunde.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) Es wird ein Zeitpunkt gesucht, an dem sich der Charakter des Anstiegs ändert (von „immer stärker“ zu „nicht mehr stärker“). Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt und erläutern Sie kurz, warum er für Prognosen hilfreich ist.

$$f''(t) = -0.06t + 0.24$$
$$f'''(t) = -0.06$$

notw. Bed.: $f''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.06t + 0.24 && | +0.06t \\ 0.06t &= 0.24 && | :0.06 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(t) = 0 \quad \wedge \quad f'''(t) \neq 0$

$$f'''(4) = -0.06 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(t) = y$

$$f(4) = -0.01 \cdot 4^3 + 0.12 \cdot 4^2 = 1.28 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(4 \mid 1.28)$$

Der gesuchte Zeitpunkt liegt bei $t = 4$, also 4 Stunden nach Beginn des Starkregenereignisses.

Ab diesem Zeitpunkt steigt der Pegel zwar weiter, aber nicht mehr „immer stärker“. Für Prognosen ist das hilfreich, weil sich ab dort erkennen lässt, dass sich der Anstieg abschwächt und der Hochpunkt näher rückt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**