DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe r7epWW

Um Nutella herzustellen, wird unter anderem Palmöl verwendet – und Palmöl bedeutet weltweit enorme Flächenkonkurrenz. In den Hauptanbaugebieten in Südostasien werden dafür immer wieder Wälder in Plantagen umgewandelt. Das hat Folgen für Klima und Artenvielfalt, weil nicht nur Waldfläche verloren geht, sondern auch große Mengen CO_2 freigesetzt werden und Lebensräume zerschnitten werden. Zur Einordnung: Für Indonesien wurde für den Zeitraum 1995–2015 modellbasiert geschätzt, dass neue großflächige Ölpalmenplantagen im Mittel rund 117 000 ha Wald pro Jahr verdrängten (zusätzlich zur allgemeinen Plantagen-Ausweitung). Das entspricht ungefähr dem 1.3-fachen der Fläche Berlins oder rund 164 000 Fußballfeldern.
Der brasilianische Landwirt Aurelio Andrade pachtet ein Gebiet im Amazonasbecken, das von einem Flussarm des Amazonas begrenzt wird. Auch wenn Ölpalmenplantagen dort nicht die typische Landnutzung sind, zeigt das Beispiel, wie wirtschaftliche Anreize dazu führen können, dass selbst ökologisch sensible Flächen unter Nutzungsdruck geraten. Für die folgende Rechnung wird daher ein stark vereinfachtes Modell betrachtet, das nur die geometrische Größe der betroffenen Fläche in den Blick nimmt.
Der Verlauf dieses Amazonas-Flussabschnitts wird im Modell durch den Funktionsgraphen

$$a(x) = 0.5x^3 - 3x$$

beschrieben. Als Grundstücksgrenze wird die x-Achse verwendet. Das gepachtete Grundstück ist somit genau der Bereich, der zwischen dem Graphen von $a(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 km.

Beziehen Sie sich auf die Situationsbeschreibung zu Aurelio Andrade.

a) Ermitteln Sie die Größe der Fläche, die gerodet werden müsste (in km^2). Begründen Sie dabei kurz, warum hier der geometrische Flächeninhalt betrachtet werden muss (und nicht nur der Integralwert mit Vorzeichen).

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x^3 - 3x \\ &= x(0.5x^2 - 3) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.5x^2 - 3 &= 0 && | \; +3 \\ 0.5x^2 &= 3 && | \; :0.5 \\ x^2 &= 6 && | \; \sqrt{} \\ x_2 = \sqrt{6} \approx 2.449 \quad &\vee \quad x_3 = -\sqrt{6} \approx -2.449 \end{aligned}$$

Das Grundstück liegt also zwischen $x = -\sqrt{6}$ und $x = \sqrt{6}$. Zwischen $-\sqrt{6}$ und 0 verläuft der Graph oberhalb, zwischen 0 und $\sqrt{6}$ unterhalb der x-Achse. Beim Integral mit Vorzeichen würden sich die beiden Teilflächen aufheben, obwohl auf beiden Seiten tatsächlich Fläche gerodet wird. Deshalb wird der geometrische Flächeninhalt betrachtet, also die Summe der Beträge der Teilflächen.

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, sind die beiden Teilflächen betragsmäßig gleich groß. Es genügt daher, eine Teilfläche zu berechnen und das

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Ergebnis zu verdoppeln:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^{\sqrt{6}} (0.5x^3 - 3x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{6}} \\
&= \frac{1}{8}\cdot\left(\sqrt{6}\right)^4 - \frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2 - 0 \\
&= \frac{36}{8} - 9 \\
&= -\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= 2\cdot|A_1| \\
&= 2\cdot\left|-\frac{9}{2}\right| \\
&= 9
\end{aligned}$$

Die gerodete Fläche beträgt $9\,\text{km}^2$.

b) Die Pacht beträgt rund 450 Brasilianische Real pro km^2 und Monat. Bestimmen Sie, welche Kosten pro Jahr für die Fläche von Herrn Andrade entstehen (in Real/Jahr).

$$\begin{aligned}
K_{\text{Monat}} &= 9\cdot 450 = 4050 \\
K_{\text{Jahr}} &= 4050\cdot 12 = 48\,600
\end{aligned}$$

Die jährlichen Pachtkosten betragen $48\,600\,\text{BRL/Jahr}$.

c) Recherchieren Sie einen aktuellen Wechselkurs BRL $\Rightarrow$ EUR und rechnen Sie die jährlichen Pachtkosten aus Teilaufgabe b) in Euro um. Notieren Sie Quelle und Datum des Wechselkurses.

Verwendeter Wechselkurs (Quelle: Europäische Zentralbank (EZB), Datum: 10.04.2026): Der Referenzkurs lautet $1\,\text{EUR} = 5.9191\,\text{BRL}$, also $1\,\text{BRL} \approx 0.168945\,\text{EUR}$.

$$\begin{aligned}
K_{\text{EUR}} &= \frac{48\,600}{5.9191} \\
&\approx 8210.708
\end{aligned}$$

Die jährlichen Pachtkosten entsprechen ungefähr $8210.71\,\text{EUR/Jahr}$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Um die gerodete Fläche besser einordnen zu können, soll sie in „Fußballfeldern“ angegeben werden. Recherchieren Sie dafür die Standardmaße eines Fußballfelds (z. B. Bundesliga/DFB-Norm), berechnen Sie daraus die Fläche eines Spielfelds und bestimmen Sie anschließend, wie vielen Fußballfeldern die gerodete Fläche von Herrn Andrade entspricht. Notieren Sie Quelle und Datum Ihrer Recherche.

Verwendete Spielfeldmaße: $105\,\text{m} \times 68\,\text{m}$ (Quelle: FIFA-Empfehlung für Spielfeldmaße, Datum der Recherche: 12.04.2026).

$$A_{\text{Feld}} = 105 \cdot 68 = 7140\,\text{m}^2$$

Die gerodete Fläche aus Teilaufgabe a) beträgt $9\,\text{km}^2 = 9\,000\,000\,\text{m}^2$.

$$\begin{aligned} n &= \frac{9\,000\,000}{7140} \\ &\approx 1260.504 \end{aligned}$$

Die gerodete Fläche entspricht ungefähr 1261 Fußballfeldern.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**