DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe q1RiGr

Von der Ableitung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades liegen drei Punkte vor:

$$P_1(0 \mid 5), \quad P_2(1 \mid -4), \quad P_3(2 \mid -7)$$

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c, indem Sie aus den drei Punkten ein lineares Gleichungssystem aufstellen und lösen. Geben Sie anschließend $f'(x)$ an.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Da die drei Punkte auf dem Graphen von f' liegen, gilt:

$$\begin{aligned} f'(0) = 5 \quad &\Rightarrow \quad 5 = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c \quad &= c \\ f'(1) = -4 \quad &\Rightarrow \quad -4 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c \quad &= 3a + 2b + c \\ f'(2) = -7 \quad &\Rightarrow \quad -7 = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c \quad &= 12a + 4b + c \end{aligned}$$

Aus der ersten Bedingung folgt direkt $c = 5$. Einsetzen in die beiden anderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 3a + 2b + 5 = -4 \quad && \mid -5 \\ \text{I}' \quad & 3a + 2b = -9 \\ \\ \text{II} \quad & 12a + 4b + 5 = -7 \quad && \mid -5 \\ \text{II}' \quad & 12a + 4b = -12 \quad && \mid :4 \\ \text{II}'' \quad & 3a + b = -3 \\ \\ \text{I}' - \text{II}'' \quad & b = -6 \\ \\ b \text{ in II}'' \quad & 3a - 6 = -3 \quad && \mid +6 \\ & 3a = 3 \quad && \mid :3 \\ & a = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 1, \quad b = -6, \quad c = 5$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$$

b) Bestimmen Sie $f''(x)$ und $f'''(x)$.

$$f''(x) = 6x - 12$$
$$f'''(x) = 6$$

c) Berechnen Sie die Wendestelle x_W der Ausgangsfunktion f mithilfe der Bedingungen $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$. Der zugehörige Wendepunkt lautet zur weiteren Rechnung: WP$(2 \mid 8)$.

notw. Bed.: $f''(x_W) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 12 \quad && \mid +12 \\ 6x &= 12 \quad && \mid :6 \\ x_W &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$

$$f'''(2) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Bestimmen Sie die Tangente im Wendepunkt, indem Sie die Steigung $m = f'(2)$ berechnen und anschließend die Tangentengleichung aufstellen.

$$m = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 5 = -7$$

Ansatz: $t(x) = mx + n = -7x + n$

Da die Tangente durch den Wendepunkt WP$(2 \mid 8)$ verläuft, gilt:

$$\begin{aligned} t(2) &= 8 \\ -7 \cdot 2 + n &= 8 \quad | +14 \\ n &= 22 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t(x) = -7x + 22$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**