DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe pbjkps

Bestimmen Sie die Wendepunkte der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 6 && | +6 \\ 6x &= 6 && | :6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(1) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1 \mid -2)$$

b) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 2x - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2 \\ f''(x) &= x^2 - 4 \\ f'''(x) &= 2x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4 && | +4 \\ x^2 &= 4 && | \sqrt{} \\ x_1 = 2 \quad &\vee \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(2) &= 2 \cdot 2 = 4 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-2) &= 2 \cdot (-2) = -4 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{12} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = -\frac{11}{3} \approx -3.667 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(2 \mid -3.67) \\ f(-2) &= \frac{1}{12} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 1 = -\frac{35}{3} \approx -11.667 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-2 \mid -11.67) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = 0.05x^5 - 0.5x^4 + \frac{11}{6}x^3 - 3x^2 + 3$

$$f'(x) = 0.25x^4 - 2x^3 + 5.5x^2 - 6x$$
$$f''(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
$$f'''(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad | \, x_1 = 1$$

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

$$0 = x^2 - 5x + 6$$
$$x_{2/3} = 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 6}$$
$$x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 2$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 11 = 2 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 11 = 2 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 11 = -1 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(1) = 0.05 \cdot 1^5 - 0.5 \cdot 1^4 + \frac{11}{6} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 = \frac{83}{60}$$
$$\approx 1.383 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1 \mid 1.38)$$
$$f(3) = 0.05 \cdot 3^5 - 0.5 \cdot 3^4 + \frac{11}{6} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 = -\frac{57}{20}$$
$$= -2.85 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(3 \mid -2.85)$$
$$f(2) = 0.05 \cdot 2^5 - 0.5 \cdot 2^4 + \frac{11}{6} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 = -\frac{11}{15}$$
$$\approx -0.733 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(2 \mid -0.73)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = 0.05x^5 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.25x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 - 2 \\ f''(x) &= x^3 - 2x^2 - 8x \\ f'''(x) &= 3x^2 - 4x - 8 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 2x^2 - 8x \\ &= x(x^2 - 2x - 8) \qquad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2x - 8 \\ x_{2/3} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 8} \\ x_2 &= 4 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 8 = -8 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(4) &= 3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 8 = 24 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 8 = 12 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0.05 \cdot 0^5 - \frac{1}{6} \cdot 0^4 - \frac{4}{3} \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 = 0 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0 \mid 0) \\ f(4) &= 0.05 \cdot 4^5 - \frac{1}{6} \cdot 4^4 - \frac{4}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4 = -\frac{424}{5} \\ &= -84.8 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(4 \mid -84.8) \\ f(-2) &= 0.05 \cdot (-2)^5 - \frac{1}{6} \cdot (-2)^4 - \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) = \frac{52}{5} \\ &= 10.4 && \Rightarrow \mathrm{WP}_3(-2 \mid 10.4) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{5}{6}x^4 + 4.5x^2 + x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x + 1 \\ f''(x) &= x^4 - 10x^2 + 9 \\ f'''(x) &= 4x^3 - 20x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - 10x^2 + 9 && | \; x^2 = z \\ &= z^2 - 10z + 9 \\ z_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - 9} \\ z_1 = 9 \quad &\vee \quad z_2 = 1 && | \; x = \sqrt{z} \\ x_1 = 3 \quad &\vee \quad x_2 = -3 \quad \vee \quad x_3 = 1 \quad \vee \quad x_4 = -1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(3) &= 4 \cdot 3^3 - 20 \cdot 3 = 48 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-3) &= 4 \cdot (-3)^3 - 20 \cdot (-3) = -48 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(1) &= 4 \cdot 1^3 - 20 \cdot 1 = -16 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-1) &= 4 \cdot (-1)^3 - 20 \cdot (-1) = 16 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{30} \cdot 3^6 - \frac{5}{6} \cdot 3^4 + 4.5 \cdot 3^2 + 3 = \frac{3}{10} = 0.3 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(3 \mid 0.3) \\ f(-3) &= \frac{1}{30} \cdot (-3)^6 - \frac{5}{6} \cdot (-3)^4 + 4.5 \cdot (-3)^2 + (-3) = -\frac{57}{10} \\ &= -5.7 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-3 \mid -5.7) \\ f(1) &= \frac{1}{30} \cdot 1^6 - \frac{5}{6} \cdot 1^4 + 4.5 \cdot 1^2 + 1 = \frac{47}{10} = 4.7 && \Rightarrow \mathrm{WP}_3(1 \mid 4.7) \\ f(-1) &= \frac{1}{30} \cdot (-1)^6 - \frac{5}{6} \cdot (-1)^4 + 4.5 \cdot (-1)^2 + (-1) = \frac{27}{10} \\ &= 2.7 && \Rightarrow \mathrm{WP}_4(-1 \mid 2.7) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{29}{12}x^4 + 50x^2 - 5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{5}x^5 - \frac{29}{3}x^3 + 100x \\ f''(x) &= x^4 - 29x^2 + 100 \\ f'''(x) &= 4x^3 - 58x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - 29x^2 + 100 && \mid x^2 = z \\ &= z^2 - 29z + 100 \\ z_{1/2} &= 14.5 \pm \sqrt{14.5^2 - 100} \\ z_1 = 25 \quad &\vee \quad z_2 = 4 && \mid x = \sqrt{z} \\ x_1 = 5 \quad &\vee \quad x_2 = -5 \quad \vee \quad x_3 = 2 \quad \vee \quad x_4 = -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(5) &= 4 \cdot 5^3 - 58 \cdot 5 = 210 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-5) &= 4 \cdot (-5)^3 - 58 \cdot (-5) = -210 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(2) &= 4 \cdot 2^3 - 58 \cdot 2 = -84 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-2) &= 4 \cdot (-2)^3 - 58 \cdot (-2) = 84 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(5) &= \frac{1}{30} \cdot 5^6 - \frac{29}{12} \cdot 5^4 + 50 \cdot 5^2 - 5 = \frac{3065}{12} \approx 255.417 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(5 \mid 255.42) \\ f(-5) &= \frac{1}{30} \cdot (-5)^6 - \frac{29}{12} \cdot (-5)^4 + 50 \cdot (-5)^2 - 5 = \frac{3065}{12} \\ &\approx 255.417 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-5 \mid 255.42) \\ f(2) &= \frac{1}{30} \cdot 2^6 - \frac{29}{12} \cdot 2^4 + 50 \cdot 2^2 - 5 = \frac{2377}{15} \approx 158.467 && \Rightarrow \mathrm{WP}_3(2 \mid 158.47) \\ f(-2) &= \frac{1}{30} \cdot (-2)^6 - \frac{29}{12} \cdot (-2)^4 + 50 \cdot (-2)^2 - 5 = \frac{2377}{15} \\ &\approx 158.467 && \Rightarrow \mathrm{WP}_4(-2 \mid 158.47) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = \frac{1}{42}x^7 - \frac{1}{15}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 9x^2 + 3x + 2$

$$f'(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{20}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 18x + 3$$
$$f''(x) = x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 9x - 18$$
$$f'''(x) = 5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 40x + 9$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 9x - 18 \quad | \, x_1 = -3$$

	1	−2	−10	20	9	−18
−3		−3	15	−15	−15	18
	1	−5	5	5	−6	0

$$0 = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 \quad | \, x_2 = -1$$

	1	−5	5	5	−6
−1		−1	6	−11	6
	1	−6	11	−6	0

$$0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad | \, x_3 = 1$$

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

$$0 = x^2 - 5x + 6$$
$$x_{4/5} = 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 6}$$
$$x_4 = 3 \quad \vee \quad x_5 = 2$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(-3) = 5 \cdot (-3)^4 - 8 \cdot (-3)^3 - 30 \cdot (-3)^2 + 40 \cdot (-3) + 9 = 240 \neq 0 \quad \checkmark$$
$$f'''(-1) = 5 \cdot (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^3 - 30 \cdot (-1)^2 + 40 \cdot (-1) + 9 = -48 \neq 0 \quad \checkmark$$
$$f'''(1) = 5 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^3 - 30 \cdot 1^2 + 40 \cdot 1 + 9 = 16 \neq 0 \quad \checkmark$$
$$f'''(3) = 5 \cdot 3^4 - 8 \cdot 3^3 - 30 \cdot 3^2 + 40 \cdot 3 + 9 = 48 \neq 0 \quad \checkmark$$
$$f'''(2) = 5 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 - 30 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2 + 9 = -15 \neq 0 \quad \checkmark$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned}
f(-3) &= \frac{1}{42}\cdot(-3)^7 - \frac{1}{15}\cdot(-3)^6 - \frac{1}{2}\cdot(-3)^5 + \cdots = \frac{1913}{70} \\
&\approx 27.329 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(-3 \mid 27.33) \\
f(-1) &= \frac{1}{42}\cdot(-1)^7 - \frac{1}{15}\cdot(-1)^6 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^5 + \cdots = -\frac{1979}{210} \\
&\approx -9.424 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-1 \mid -9.42) \\
f(1) &= \frac{1}{42}\cdot 1^7 - \frac{1}{15}\cdot 1^6 - \frac{1}{2}\cdot 1^5 + \cdots = -\frac{289}{210} \\
&\approx -1.376 && \Rightarrow \mathrm{WP}_3(1 \mid -1.38) \\
f(3) &= \frac{1}{42}\cdot 3^7 - \frac{1}{15}\cdot 3^6 - \frac{1}{2}\cdot 3^5 + \cdots = -\frac{877}{70} \\
&\approx -12.529 && \Rightarrow \mathrm{WP}_4(3 \mid -12.53) \\
f(2) &= \frac{1}{42}\cdot 2^7 - \frac{1}{15}\cdot 2^6 - \frac{1}{2}\cdot 2^5 + \cdots = -\frac{688}{105} \\
&\approx -6.552 && \Rightarrow \mathrm{WP}_5(2 \mid -6.55)
\end{aligned}$$

h) $f(x) = \frac{1}{56}x^8 - \frac{7}{15}x^6 + \frac{49}{12}x^4$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{7}x^7 - \frac{14}{5}x^5 + \frac{49}{3}x^3 \\
f''(x) &= x^6 - 14x^4 + 49x^2 \\
f'''(x) &= 6x^5 - 56x^3 + 98x
\end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= x^6 - 14x^4 + 49x^2 \\
&= x^2(x^4 - 14x^2 + 49) && \mid x_1 = 0 \\
\\
0 &= x^4 - 14x^2 + 49 && \mid x^2 = z \\
&= z^2 - 14z + 49 \\
z_{1/2} &= 7 \pm \sqrt{7^2 - 49} \\
z &= 7 && \mid x = \sqrt{z} \\
x_2 &= \sqrt{7} \approx 2.646 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{7} \approx -2.646
\end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}
f'''(0) &= 6\cdot 0^5 - 56\cdot 0^3 + 98\cdot 0 = 0 \\
f'''(\sqrt{7}) &= 6\cdot(\sqrt{7})^5 - 56\cdot(\sqrt{7})^3 + 98\cdot\sqrt{7} = 0 \\
f'''(-\sqrt{7}) &= 6\cdot(-\sqrt{7})^5 - 56\cdot(-\sqrt{7})^3 + 98\cdot(-\sqrt{7}) = 0
\end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$ ist hier also an keiner Stelle erfüllt. Da jedoch

$$f''(x) = x^2(x^2 - 7)^2 \geq 0$$

für alle x gilt, findet kein Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ statt. Die Funktion besitzt also keine Wendepunkte.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**