DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe nreUqD

Bestimmen Sie bei jeder Funktion die Extrempunkte vollständig.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 12x + 9 \quad &| :3 \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_1 &= 3 \quad \vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(3) &= 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \quad &\Rightarrow \text{TP} \\ f''(1) &= 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \quad &\Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0 \quad &\Rightarrow \text{TP}(3 \mid 0) \\ f(1) &= 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4 \quad &\Rightarrow \text{HP}(1 \mid 4) \end{aligned}$$

b) $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 6$

$$g'(x) = -3x^2 + 6x$$
$$g''(x) = -6x + 6$$

notw. Bed.: $g'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -3x^2 + 6x \\ &= x(-3x + 6) \quad &| \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -3x + 6 \quad &| \, +3x \\ 3x &= 6 \quad &| \, :3 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g'(x) = 0 \quad \wedge \quad g''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} g''(0) &= -6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0 \quad &\Rightarrow \text{TP} \\ g''(2) &= -6 \cdot 2 + 6 = -6 < 0 \quad &\Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $g(x) = y$

$$\begin{aligned} g(0) &= -0^3 + 3 \cdot 0^2 + 6 = 6 \quad &\Rightarrow \text{TP}(0 \mid 6) \\ g(2) &= -2^3 + 3 \cdot 2^2 + 6 = 10 \quad &\Rightarrow \text{HP}(2 \mid 10) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $h(x) = 2x^4 - 8x^2 + 3$

$$h'(x) = 8x^3 - 16x$$
$$h''(x) = 24x^2 - 16$$

notw. Bed.: $h'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 8x^3 - 16x \\ &= x(8x^2 - 16) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 8x^2 - 16 && | \; +16 \\ 8x^2 &= 16 && | \; :8 \\ x^2 &= 2 && | \; \sqrt{} \end{aligned}$$

$$x_2 = \sqrt{2} \approx 1.414 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{2} \approx -1.414$$

hinr. Bed.: $h'(x) = 0 \quad \wedge \quad h''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} h''(0) &= 24 \cdot 0^2 - 16 = -16 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ h''(\sqrt{2}) &= 24 \cdot 2 - 16 = 32 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ h''(-\sqrt{2}) &= 24 \cdot 2 - 16 = 32 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$\begin{aligned} h(0) &= 3 && \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 3) \\ h(\sqrt{2}) &= 2 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 3 = -5 && \Rightarrow \text{TP}(1.41 \mid -5) \\ h(-\sqrt{2}) &= 2 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 3 = -5 && \Rightarrow \text{TP}(-1.41 \mid -5) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $k(x) = -0.25x^4 + 2x^2 - 1$

$$k'(x) = -x^3 + 4x$$
$$k''(x) = -3x^2 + 4$$

notw. Bed.: $k'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^3 + 4x \\ &= x(-x^2 + 4) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 4 && | \; +x^2 \\ x^2 &= 4 && | \; \sqrt{} \\ x_2 = 2 \quad &\vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $k'(x) = 0 \quad \wedge \quad k''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} k''(0) &= -3 \cdot 0^2 + 4 = 4 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ k''(2) &= -3 \cdot 2^2 + 4 = -8 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ k''(-2) &= -3 \cdot (-2)^2 + 4 = -8 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $k(x) = y$

$$\begin{aligned} k(0) &= -1 && \Rightarrow \text{TP}(0 \mid -1) \\ k(2) &= -0.25 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 1 = 3 && \Rightarrow \text{HP}(2 \mid 3) \\ k(-2) &= -0.25 \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2 - 1 = 3 && \Rightarrow \text{HP}(-2 \mid 3) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $m(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

$$m'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4$$
$$m''(x) = 20x^3 - 30x$$

notw. Bed.: $m'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= 5x^4 - 15x^2 + 4 && | :5 \\
&= x^4 - 3x^2 + 0.8 && | x^2 = z \\
&= z^2 - 3z + 0.8 \\
z_{1/2} &= 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 0.8} \\
z_1 \approx 2.704 \quad &\vee \quad z_2 \approx 0.296 && | x = \sqrt{z} \\
x_1 \approx 1.644 \quad &\vee \quad x_2 \approx -1.644 \quad \vee \quad x_3 \approx 0.544 \quad \vee \quad x_4 \approx -0.544
\end{aligned}$$

hinr. Bed.: $m'(x) = 0 \quad \wedge \quad m''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}
m''(1.644) \approx 39.546 > 0 &\quad \Rightarrow \text{TP} \\
m''(-1.644) \approx -39.546 < 0 &\quad \Rightarrow \text{HP} \\
m''(0.544) \approx -13.100 < 0 &\quad \Rightarrow \text{HP} \\
m''(-0.544) \approx 13.100 > 0 &\quad \Rightarrow \text{TP}
\end{aligned}$$

y-Wert: $m(x) = y$

$$\begin{aligned}
m(1.644) \approx -3.631 &\quad \Rightarrow \text{TP}(1.64 \mid -3.63) \\
m(-1.644) \approx 3.631 &\quad \Rightarrow \text{HP}(-1.64 \mid 3.63) \\
m(0.544) \approx 1.419 &\quad \Rightarrow \text{HP}(0.54 \mid 1.42) \\
m(-0.544) \approx -1.419 &\quad \Rightarrow \text{TP}(-0.54 \mid -1.42)
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $n(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$

$$n'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 8x$$
$$n''(x) = -12x^2 + 24x - 8$$

notw. Bed.: $n'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -4x^3 + 12x^2 - 8x \\ &= x(-4x^2 + 12x - 8) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -4x^2 + 12x - 8 \qquad | \, :(-4) \\ &= x^2 - 3x + 2 \\ x_{2/3} &= 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 2} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $n'(x) = 0 \quad \wedge \quad n''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} n''(0) &= -12 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 - 8 = -8 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \\ n''(2) &= -12 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 8 = -8 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \\ n''(1) &= -12 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 8 = 4 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $n(x) = y$

$$\begin{aligned} n(0) &= 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 0) \\ n(2) &= -2^4 + 4 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 = 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}(2 \mid 0) \\ n(1) &= -1^4 + 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 = -1 \qquad \Rightarrow \text{TP}(1 \mid -1) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**