DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe nnhpLq

Bestimmen Sie alle Nullstellen. Nutzen Sie das Horner-Schema oder die Polynomdivision.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Horner-Schema

$$0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad | \, x_1 = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

$$x_{2/3} = 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 6}$$

$$x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 2$$

Polynomdivision

$$0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad | \, x_1 = 1$$

$$\Big(\quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \Big) \div \Big(x - 1 \Big) = x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 \\ \hline -5x^2 + 11x \\ 5x^2 - 5x \\ \hline 6x - 6 \\ -6x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

$$x_{2/3} = 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 6}$$

$$x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 2$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$

Horner-Schema

$$0 = 2x^3 + x^2 - 8x - 4 \quad | \, x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -8 & -4 \\ -2 & & -4 & 6 & 4 \\ \hline & 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 3x - 2 && | :2 \\ &= x^2 - 1.5x - 1 \\ x_{2/3} &= 0.75 \pm \sqrt{0.75^2 + 1} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -0.5 \\ \Rightarrow x_1 &= -2 \quad \vee \quad x_2 = 2 \quad \vee \quad x_3 = -0.5 \end{aligned}$$

Polynomdivision

$$0 = 2x^3 + x^2 - 8x - 4 \quad | \, x_1 = -2$$

$$\begin{array}{rl} \Big(\quad 2x^3 \; + x^2 - 8x - 4 \Big) \div \Big(x + 2 \Big) = 2x^2 - 3x - 2 \\ \underline{-2x^3 - 4x^2} \\ \quad -3x^2 - 8x \\ \quad \underline{3x^2 + 6x} \\ \quad\quad -2x - 4 \\ \quad\quad \underline{2x + 4} \\ \quad\quad\quad\; 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 3x - 2 && | :2 \\ &= x^2 - 1.5x - 1 \\ x_{2/3} &= 0.75 \pm \sqrt{0.75^2 + 1} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -0.5 \\ \Rightarrow x_1 &= -2 \quad \vee \quad x_2 = 2 \quad \vee \quad x_3 = -0.5 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $h(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

Horner-Schema

$$0 = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \quad | \, x_1 = -3$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -13 & 14 & 24 \\ -3 & & -3 & 15 & -6 & -24 \\ \hline & 1 & -5 & 2 & 8 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \quad | \, x_2 = -1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ -1 & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 6x + 8 \\ x_{3/4} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\ x_3 &= 4 \quad \vee \quad x_4 = 2 \\ \Rightarrow x_1 = -3 \quad &\vee \quad x_2 = -1 \quad \vee \quad x_3 = 4 \quad \vee \quad x_4 = 2 \end{aligned}$$

Polynomdivision

$$0 = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \quad | \, x_1 = -3$$

$$\begin{array}{rl} \Big(x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \Big) \div \Big(x + 3 \Big) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \\ \underline{-x^4 - 3x^3} \\ -5x^3 - 13x^2 \\ \underline{5x^3 + 15x^2} \\ 2x^2 + 14x \\ \underline{-2x^2 - 6x} \\ 8x + 24 \\ \underline{-8x - 24} \\ 0 \end{array}$$

$$0 = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \quad | \, x_2 = -1$$

$$\begin{array}{rl} \Big(x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Big) \div \Big(x + 1 \Big) = x^2 - 6x + 8 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ -6x^2 + 2x \\ \underline{6x^2 + 6x} \\ 8x + 8 \\ \underline{-8x - 8} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 6x + 8 \\ x_{3/4} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\ x_3 &= 4 \quad \vee \quad x_4 = 2 \\ \Rightarrow x_1 = -3 \quad &\vee \quad x_2 = -1 \quad \vee \quad x_3 = 4 \quad \vee \quad x_4 = 2 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $i(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Horner-Schema

$$0 = x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad | \, x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & & -2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 1 && | \, +1 \\ x^2 &= 1 && | \, \sqrt{} \\ x_2 &= 1 \quad \vee \quad x_3 = -1 \\ \Rightarrow x_1 &= -2 \quad \vee \quad x_2 = 1 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

Polynomdivision

$$0 = x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad | \, x_1 = -2$$

$$\begin{array}{l} \Big(\quad x^3 + 2x^2 - x - 2 \Big) \div \Big(x + 2 \Big) = x^2 - 1 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ \qquad\qquad -x - 2 \\ \qquad\qquad \underline{x + 2} \\ \qquad\qquad\quad\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 1 && | \, +1 \\ x^2 &= 1 && | \, \sqrt{} \\ x_2 &= 1 \quad \vee \quad x_3 = -1 \\ \Rightarrow x_1 &= -2 \quad \vee \quad x_2 = 1 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $j(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$

Horner-Schema

$$0 = x^3 - 4x^2 - x + 4 \quad | \, x_1 = -1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -1 & 4 \\ -1 & & -1 & 5 & -4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 5x + 4$$

$$x_{2/3} = 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4}$$

$$x_2 = 4 \quad \vee \quad x_3 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 4 \quad \vee \quad x_3 = 1$$

Polynomdivision

$$0 = x^3 - 4x^2 - x + 4 \quad | \, x_1 = -1$$

$$\Big(\quad x^3 - 4x^2 \quad - x + 4 \Big) \div \Big(x + 1 \Big) = x^2 - 5x + 4$$

$$\begin{array}{r} -x^3 \quad -x^2 \\ \hline -5x^2 \quad -x \\ 5x^2 + 5x \\ \hline 4x + 4 \\ -4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 5x + 4$$

$$x_{2/3} = 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4}$$

$$x_2 = 4 \quad \vee \quad x_3 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 4 \quad \vee \quad x_3 = 1$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $k(x) = x^4 - 5x^3 - 3.25x^2 + 29.75x - 22.5$

Horner-Schema

$$0 = x^4 - 5x^3 - 3.25x^2 + 29.75x - 22.5 \quad | \, x_1 = 1$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -5 & -\frac{13}{4} & \frac{119}{4} & -\frac{45}{2} \\ 1 & & 1 & -4 & -\frac{29}{4} & \frac{45}{2} \\ \hline & 1 & -4 & -\frac{29}{4} & \frac{45}{2} & 0 \end{array}$$

$$0 = x^3 - 4x^2 - 7.25x + 22.5 \quad | \, x_2 = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -\frac{29}{4} & \frac{45}{2} \\ 2 & & 2 & -4 & -\frac{45}{2} \\ \hline & 1 & -2 & -\frac{45}{4} & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 2x - 11.25$$

$$x_{3/4} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 11.25}$$

$$x_3 = 4.5 \quad \vee \quad x_4 = -2.5$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = 2 \quad \vee \quad x_3 = 4.5 \quad \vee \quad x_4 = -2.5$$

Polynomdivision

$$0 = x^4 - 5x^3 - 3.25x^2 + 29.75x - 22.5 \quad | \, x_1 = 1$$

Die Polynomdivision kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{array}{r} \left(x^4 - 5x^3 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{119}{4}x - \frac{45}{2} \right) \div \left(x - 1 \right) = x^3 - 4x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{45}{2} \\ \underline{-x^4 + x^3} \\ -4x^3 - \frac{13}{4}x^2 \\ \underline{4x^3 - 4x^2} \\ -\frac{29}{4}x^2 + \frac{119}{4}x \\ \underline{\frac{29}{4}x^2 - \frac{29}{4}x} \\ \frac{45}{2}x - \frac{45}{2} \\ \underline{-\frac{45}{2}x + \frac{45}{2}} \\ 0 \end{array}$$

$$0 = x^3 - 4x^2 - 7.25x + 22.5 \quad | \, x_2 = 2$$

$$\begin{array}{r} \left(x^3 - 4x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{45}{2} \right) \div \left(x - 2 \right) = x^2 - 2x - \frac{45}{4} \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 - \frac{29}{4}x \\ \underline{2x^2 - 4x} \\ -\frac{45}{4}x + \frac{45}{2} \\ \underline{\frac{45}{4}x - \frac{45}{2}} \\ 0 \end{array}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$0 = x^2 - 2x - 11.25$$
$$x_{3/4} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 11.25}$$
$$x_3 = 4.5 \quad \vee \quad x_4 = -2.5$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = 2 \quad \vee \quad x_3 = 4.5 \quad \vee \quad x_4 = -2.5$$

g) $l(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

Horner-Schema

$$0 = x^3 + 3x^2 - 10x - 24 \quad | \, x_1 = -4$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -10 & -24 \\ -4 & & -4 & 4 & 24 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - x - 6$$
$$x_{2/3} = 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6}$$
$$x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = -2$$
$$\Rightarrow x_1 = -4 \quad \vee \quad x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = -2$$

Polynomdivision

$$0 = x^3 + 3x^2 - 10x - 24 \quad | \, x_1 = -4$$

$$\begin{array}{rl} \Big(x^3 + 3x^2 - 10x - 24 \Big) \div \Big(x + 4 \Big) = x^2 - x - 6 \\ \underline{-x^3 - 4x^2} \\ -x^2 - 10x \\ \underline{x^2 + 4x} \\ -6x - 24 \\ \underline{6x + 24} \\ 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - x - 6$$
$$x_{2/3} = 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6}$$
$$x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = -2$$
$$\Rightarrow x_1 = -4 \quad \vee \quad x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = -2$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) $m(x) = 2x^4 - 12x^3 - 10x^2 + 84x + 80$

Horner-Schema

$$0 = 2x^4 - 12x^3 - 10x^2 + 84x + 80 \quad | \, x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -12 & -10 & 84 & 80 \\ -2 & & -4 & 32 & -44 & -80 \\ \hline & 2 & -16 & 22 & 40 & 0 \end{array}$$

$$0 = 2x^3 - 16x^2 + 22x + 40 \quad | \, x_2 = -1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -16 & 22 & 40 \\ -1 & & -2 & 18 & -40 \\ \hline & 2 & -18 & 40 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 18x + 40 \quad | :2 \\ &= x^2 - 9x + 20 \\ x_{3/4} &= 4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 20} \\ x_3 &= 5 \quad \vee \quad x_4 = 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = -1 \quad \vee \quad x_3 = 5 \quad \vee \quad x_4 = 4$$

Polynomdivision

$$0 = 2x^4 - 12x^3 - 10x^2 + 84x + 80 \quad | \, x_1 = -2$$

$$\begin{array}{rl} \Big(2x^4 - 12x^3 - 10x^2 + 84x + 80 \Big) \div \Big(x + 2 \Big) = 2x^3 - 16x^2 + 22x + 40 \\ \underline{-2x^4 - 4x^3} \\ -16x^3 - 10x^2 \\ \underline{16x^3 + 32x^2} \\ 22x^2 + 84x \\ \underline{-22x^2 - 44x} \\ 40x + 80 \\ \underline{-40x - 80} \\ 0 \end{array}$$

$$0 = 2x^3 - 16x^2 + 22x + 40 \quad | \, x_2 = -1$$

$$\begin{array}{rl} \Big(2x^3 - 16x^2 + 22x + 40 \Big) \div \Big(x + 1 \Big) = 2x^2 - 18x + 40 \\ \underline{-2x^3 - 2x^2} \\ -18x^2 + 22x \\ \underline{18x^2 + 18x} \\ 40x + 40 \\ \underline{-40x - 40} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 18x + 40 \quad | :2 \\ &= x^2 - 9x + 20 \\ x_{3/4} &= 4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 20} \\ x_3 &= 5 \quad \vee \quad x_4 = 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = -1 \quad \vee \quad x_3 = 5 \quad \vee \quad x_4 = 4$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i) $n(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

Horner-Schema

$$0 = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 \quad | \, x_1 = -3$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ -3 & & -3 & 6 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad | \, x_2 = -1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 3x + 2$$

$$x_{3/4} = 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 2}$$

$$x_3 = 2 \quad \vee \quad x_4 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = -3 \quad \vee \quad x_2 = -1 \quad \vee \quad x_3 = 2 \quad \vee \quad x_4 = 1$$

Polynomdivision

$$0 = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 \quad | \, x_1 = -3$$

$$\Big(\quad x^4 \; + x^3 - 7x^2 \; - x + 6 \Big) \div \Big(x + 3 \Big) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$\begin{array}{r} -x^4 - 3x^3 \\ \hline -2x^3 - 7x^2 \\ 2x^3 + 6x^2 \\ \hline -x^2 \; - x \\ x^2 + 3x \\ \hline 2x + 6 \\ -2x - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$0 = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad | \, x_2 = -1$$

$$\Big(\quad x^3 - 2x^2 \; - x + 2 \Big) \div \Big(x + 1 \Big) = x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{array}{r} -x^3 \; - x^2 \\ \hline -3x^2 \; - x \\ 3x^2 + 3x \\ \hline 2x + 2 \\ -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 3x + 2$$

$$x_{3/4} = 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 2}$$

$$x_3 = 2 \quad \vee \quad x_4 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = -3 \quad \vee \quad x_2 = -1 \quad \vee \quad x_3 = 2 \quad \vee \quad x_4 = 1$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

j) $o(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Horner-Schema

$$0 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad | \, x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{2/3} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = 1 \\ \Rightarrow x_1 &= -2 \quad \vee \quad x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 1 \end{aligned}$$

Polynomdivision

$$0 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad | \, x_1 = -2$$

$$\begin{array}{rl} \Big(& x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \Big) \div \Big(x + 2 \Big) = x^2 - 4x + 3 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} & \\ -4x^2 - 5x & \\ \underline{4x^2 + 8x} & \\ 3x + 6 & \\ \underline{-3x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{2/3} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = 1 \\ \Rightarrow x_1 &= -2 \quad \vee \quad x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 1 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**