DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe ncdCr6

Ein Karton hat ein variables Innenmaß x (in cm). Das Innenvolumen (in cm^3) wird modelliert durch

$$V(x) = x^3 - 9x^2 + 20x$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von $V(x)$.

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 9x^2 + 20x \\ &= x(x^2 - 9x + 20) \qquad \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 9x + 20 \\ x_{2/3} &= 4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 20} \\ x_2 &= 5 \quad \vee \quad x_3 = 4 \end{aligned}$$

b) Interpretieren Sie die Nullstellen im Kontext „Volumen“.

Für $x = 0$, $x = 4$ und $x = 5$ ist das Innenvolumen gleich $0\,\text{cm}^3$, der Karton besitzt bei diesen Innenmaßen kein Innenvolumen. Ein positives Volumen ergibt sich für $0 < x < 4$ (und für $x > 5$).

c) Für welchen Wert von x ist das Innenvolumen am größten?

$$\begin{aligned} V'(x) &= 3x^2 - 18x + 20 \\ V''(x) &= 6x - 18 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $V'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 18x + 20 \qquad \mid :3 \\ &= x^2 - 6x + \frac{20}{3} \\ x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - \frac{20}{3}} \\ x_1 &\approx 4.528 \quad \vee \quad x_2 \approx 1.472 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $V'(x) = 0 \quad \wedge \quad V''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} V''(4.528) &= 6 \cdot 4.528 - 18 = 9.168 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ V''(1.472) &= 6 \cdot 1.472 - 18 = -9.168 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

Im sinnvollen Bereich $0 < x < 4$ ist das Innenvolumen für $x \approx 1.472\,\text{cm}$ am größten.

d) Bestimmen Sie das maximale Innenvolumen in cm^3.

y-Wert: $V(x) = y$

$$V(1.472) = 1.472^3 - 9 \cdot 1.472^2 + 20 \cdot 1.472 \approx 13.128 \qquad \Rightarrow \text{HP}(1.47 \mid 13.13)$$

Das maximale Innenvolumen beträgt etwa $13.13\,\text{cm}^3$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**