DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe nWwBrJ

Gegeben sind eine quadratische Funktion $p(x)$ und eine lineare Funktion $g(x)$. Untersuchen Sie die Lage der beiden Graphen zueinander, indem Sie die Schnittstellen der Parabel mit der Geraden bestimmen. Ermitteln Sie außerdem den Scheitelpunkt sowie die Nullstellen der quadratischen Funktion.

a) $p(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2, \quad g(x) = \frac{2}{3}x + 3$

Schnittstellen Parabel – Gerade:

$$\begin{aligned} p(x) &= g(x) \\ \frac{1}{3}x^2 + 2 &= \frac{2}{3}x + 3 && | \cdot 3 \\ x^2 + 6 &= 2x + 9 && | -x^2 - 6 \\ 0 &= -x^2 + 2x + 3 && | \cdot(-1) \\ 0 &= x^2 - 2x - 3 \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} \\ x_1 &= 3 \quad \vee \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(3) &= \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 = 5 && \Rightarrow P_1(3 \mid 5) \\ g(-1) &= \frac{2}{3} \cdot (-1) + 3 = \frac{7}{3} \approx 2.33 && \Rightarrow P_2(-1 \mid 2.33) \end{aligned}$$

Die Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten, sie ist eine Sekante.

Scheitelpunkt der Parabel: Bei dieser Funktion entspricht die Normalform der Scheitelpunktform.

$$\begin{aligned} p(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2 &= \frac{1}{3}(x - 0)^2 + 2 \\ \Rightarrow S(0 \mid 2) \end{aligned}$$

Nullstellen der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ \frac{1}{3}x^2 + 2 &= 0 && | -2 \\ \frac{1}{3}x^2 &= -2 && | :\frac{1}{3} \\ x^2 &= -6 && | \sqrt{} \\ x &= \pm\sqrt{-6} \end{aligned}$$

Der Term unter der Wurzel ist negativ. ⇒ keine Nullstellen

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $p(x) = x^2 - 4x + 1, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

Schnittstellen Parabel – Gerade:

$$\begin{aligned} p(x) &= g(x) \\ x^2 - 4x + 1 &= -0.5x + 3 && | -x^2 + 4x - 1 \\ 0 &= -x^2 + 3.5x + 2 && | \cdot(-1) \\ 0 &= x^2 - 3.5x - 2 \\ x_{1/2} &= 1.75 \pm \sqrt{1.75^2 + 2} \\ x_1 &= 4 \quad \vee \quad x_2 = -0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(4) &= -0.5 \cdot 4 + 3 = 1 && \Rightarrow P_1(4 \mid 1) \\ g(-0.5) &= -0.5 \cdot (-0.5) + 3 = 3.25 && \Rightarrow P_2(-0.5 \mid 3.25) \end{aligned}$$

Die Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten, sie ist eine Sekante.

Scheitelpunkt der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - 4x + 1 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 \\ &= (x-2)^2 - 4 + 1 \\ &= (x-2)^2 - 3 \\ &\Rightarrow S(2 \mid -3) \end{aligned}$$

Nullstellen der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ 0 &= x^2 - 4x + 1 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 1} \\ x_1 &\approx 3.732 \quad \vee \quad x_2 \approx 0.268 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $p(x) = -x^2 - 3x, \quad g(x) = \frac{1}{4}x + 2$

Schnittstellen Parabel – Gerade:

$$\begin{aligned} p(x) &= g(x) \\ -x^2 - 3x &= 0.25x + 2 && | +x^2 + 3x \\ 0 &= x^2 + 3.25x + 2 \\ x_{1/2} &= -1.625 \pm \sqrt{1.625^2 - 2} \\ x_1 &\approx -0.825 \quad \vee \quad x_2 \approx -2.425 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-0.825) &= 0.25 \cdot (-0.825) + 2 \approx 1.79 \quad \Rightarrow P_1(-0.83 \mid 1.79) \\ g(-2.425) &= 0.25 \cdot (-2.425) + 2 \approx 1.39 \quad \Rightarrow P_2(-2.43 \mid 1.39) \end{aligned}$$

Die Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten, sie ist eine Sekante.

Scheitelpunkt der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= -x^2 - 3x \\ &= -(x^2 + 3x) \\ &= -(x^2 + 3x + 1.5^2 - 1.5^2) \\ &= -\left((x + 1.5)^2 - 1.5^2\right) \\ &= -(x + 1.5)^2 + 2.25 \\ &\Rightarrow S(-1.5 \mid 2.25) \end{aligned}$$

Nullstellen der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ 0 &= -x^2 - 3x && | \cdot(-1) \\ 0 &= x^2 + 3x \\ &= x(x + 3) && | \, x_1 = 0 \\ \\ 0 &= x + 3 && | -3 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $p(x) = -x^2 + 2x + 3, \quad g(x) = -\frac{3}{4}x + 1$

Schnittstellen Parabel – Gerade:

$$\begin{aligned} p(x) &= g(x) \\ -x^2 + 2x + 3 &= -0.75x + 1 && | +x^2 - 2x - 3 \\ 0 &= x^2 - 2.75x - 2 \\ x_{1/2} &= 1.375 \pm \sqrt{1.375^2 + 2} \\ x_1 &\approx 3.347 \quad \vee \quad x_2 \approx -0.597 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(3.347) &= -0.75 \cdot 3.347 + 1 \approx -1.51 && \Rightarrow P_1(3.35 \mid -1.51) \\ g(-0.597) &= -0.75 \cdot (-0.597) + 1 \approx 1.45 && \Rightarrow P_2(-0.60 \mid 1.45) \end{aligned}$$

Die Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten, sie ist eine Sekante.

Scheitelpunkt der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= -x^2 + 2x + 3 \\ &= -(x^2 - 2x) + 3 \\ &= -(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 \\ &= -\Big((x-1)^2 - 1\Big) + 3 \\ &= -(x-1)^2 + 1 + 3 \\ &= -(x-1)^2 + 4 \\ &\Rightarrow S(1 \mid 4) \end{aligned}$$

Nullstellen der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ -(x-1)^2 + 4 &= 0 && | -4 \\ -(x-1)^2 &= -4 && | \cdot(-1) \\ (x-1)^2 &= 4 && | \sqrt{} \\ x - 1 &= \pm 2 && | +1 \\ x &= 1 \pm 2 \\ x_1 &= 3 \quad \vee \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $p(x) = -x^2 - x + 4, \quad g(x) = 3x + 5$

Schnittstellen Parabel – Gerade:

$$\begin{aligned} p(x) &= g(x) \\ -x^2 - x + 4 &= 3x + 5 && \mid +x^2 + x - 4 \\ 0 &= x^2 + 4x + 1 \\ x_{1/2} &= -2 \pm \sqrt{2^2 - 1} \\ x_1 &\approx -0.268 \quad \vee \quad x_2 \approx -3.732 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-0.268) &= 3 \cdot (-0.268) + 5 \approx 4.20 && \Rightarrow P_1(-0.27 \mid 4.20) \\ g(-3.732) &= 3 \cdot (-3.732) + 5 \approx -6.20 && \Rightarrow P_2(-3.73 \mid -6.20) \end{aligned}$$

Die Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten, sie ist eine Sekante.

Scheitelpunkt der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= -x^2 - x + 4 \\ &= -(x^2 + x) + 4 \\ &= -(x^2 + x + 0.25 - 0.25) + 4 \\ &= -\left((x + 0.5)^2 - 0.25\right) + 4 \\ &= -(x + 0.5)^2 + 0.25 + 4 \\ &= -(x + 0.5)^2 + 4.25 \\ &\Rightarrow S(-0.5 \mid 4.25) \end{aligned}$$

Nullstellen der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ 0 &= -x^2 - x + 4 && \mid \cdot(-1) \\ 0 &= x^2 + x - 4 \\ x_{1/2} &= -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 4} \\ x_1 &\approx 1.562 \quad \vee \quad x_2 \approx -2.562 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $p(x) = -x^2 - 6x, \quad g(x) = -\frac{2}{3}x + 4$

Schnittstellen Parabel – Gerade:

$$\begin{aligned} p(x) &= g(x) \\ -x^2 - 6x &= -\frac{2}{3}x + 4 && | +x^2 + 6x \\ 0 &= x^2 + \frac{16}{3}x + 4 \\ x_{1/2} &= -\frac{8}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4} \\ x_1 &\approx -0.903 \quad \vee \quad x_2 \approx -4.431 \end{aligned}$$

$$g(-0.903) = -\frac{2}{3} \cdot (-0.903) + 4 \approx 4.60 \quad \Rightarrow P_1(-0.90 \mid 4.60)$$
$$g(-4.431) = -\frac{2}{3} \cdot (-4.431) + 4 \approx 6.95 \quad \Rightarrow P_2(-4.43 \mid 6.95)$$

Die Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten, sie ist eine Sekante.

Scheitelpunkt der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= -x^2 - 6x \\ &= -(x^2 + 6x) \\ &= -(x^2 + 6x + 9 - 9) \\ &= -\left((x+3)^2 - 9\right) \\ &= -(x+3)^2 + 9 \\ &\Rightarrow S(-3 \mid 9) \end{aligned}$$

Nullstellen der Parabel:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ 0 &= -x^2 - 6x && | \cdot(-1) \\ 0 &= x^2 + 6x \\ &= x(x+6) && | \, x_1 = 0 \\ \\ 0 &= x + 6 && | -6 \\ x_2 &= -6 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**