DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe nWdTfH

Eine Produktdesignerin entwickelt eine wiederverwendbare Trinkflasche. Damit die Flasche gut in der Hand liegt, darf sie außen nicht zu breit werden. Gleichzeitig soll das Fassungsvermögen möglichst groß sein. Für den Prototyp wird der Querschnitt in einem Koordinatensystem modelliert: x beschreibt die Höhe in cm (vom Boden nach oben). Durch Rotation um die x-Achse entsteht die räumliche Flasche.
Für den betrachteten Bereich $0 \leq x \leq 18$ gelten:

$$R(x) = -0.001x^2 + 3.9$$
$$r(x) = -0.0008x^2 + 3.7$$

a) Für die Konstruktion ist entscheidend, wie dick die Wandung maximal wird. Prüfen Sie, an welcher Stelle die Wandstärke $R(x) - r(x)$ am größten ist, und geben Sie diese maximale Wandstärke (in mm) an.

$$\begin{aligned} w(x) &= R(x) - r(x) \\ &= -0.001x^2 + 3.9 - \left(-0.0008x^2 + 3.7\right) \\ &= -0.0002x^2 + 0.2 \end{aligned}$$

$$w'(x) = -0.0004x$$
$$w''(x) = -0.0004$$

notw. Bed.: $w'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.0004x \quad | :(-0.0004) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $w'(x) = 0 \quad \wedge \quad w''(x) \neq 0$

$$w''(0) = -0.0004 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $w(x) = y$

$$w(0) = -0.0002 \cdot 0^2 + 0.2 = 0.2 \qquad \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 0.2)$$

Die Wandstärke ist bei $x = 0$ cm am größten und beträgt dort 0.2 cm $= 2$ mm.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Das Design soll „schlank“ bleiben: Der Innendurchmesser darf höchstens 7.5 cm betragen. Bewerten Sie anhand des Modells, ob diese Vorgabe erfüllt ist.

Da $r(x)$ den Innenradius beschreibt, ist der Innendurchmesser dort am größten, wo $r(x)$ maximal ist.

$$r'(x) = -0.0016x$$
$$r''(x) = -0.0016$$

notw. Bed.: $r'(x) = 0$

$$0 = -0.0016x \quad | :(-0.0016)$$
$$x = 0$$

hinr. Bed.: $r'(x) = 0 \quad \wedge \quad r''(x) \neq 0$

$$r''(0) = -0.0016 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $r(x) = y$

$$r(0) = -0.0008 \cdot 0^2 + 3.7 = 3.7 \qquad \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 3.7)$$

$$d_{\max} = 2 \cdot 3.7 = 7.4 \leq 7.5$$

Der maximale Innenradius beträgt 3.7 cm, der maximale Innendurchmesser also 7.4 cm. Da $7.4 \leq 7.5$ ist, wird die Vorgabe erfüllt.

c) Für die Alltagstauglichkeit wird ein Mindestvolumen von 0.75 l gefordert. Untersuchen Sie, ob der Innenraum bis zur Höhe 18 cm dieses Volumen erreicht.

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } r(x)^2 &= (-0.0008x^2 + 3.7)^2 \\ &= (-0.0008x^2)^2 + 2 \cdot (-0.0008x^2) \cdot 3.7 + 3.7^2 \\ &= 0.00000064x^4 - 0.00592x^2 + 13.69\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^{18} (0.00000064x^4 - 0.00592x^2 + 13.69)\, dx \\ &= \pi \left[0.000000128x^5 - \frac{37}{18750}x^3 + 13.69x\right]_0^{18} \\ &= \pi \left(0.000000128 \cdot 18^5 - \frac{37}{18750} \cdot 18^3 + 13.69 \cdot 18 - 0\right) \\ &\approx \pi\,(0.2419 - 11.5085 + 246.42) \\ &\approx 235.153\pi \approx 738.756\end{aligned}$$

Mit $1000\,\text{cm}^3 = 1$ l gilt $V \approx 738.756\,\text{cm}^3 \approx 0.739$ l. Da $0.739 < 0.75$ ist, wird das Mindestvolumen von 0.75 l nicht erreicht.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Zur Materialabschätzung wird das Volumen der Flaschenwand benötigt. Ermitteln Sie das Materialvolumen.

$$\begin{aligned}
\text{Nebenrechnung: } R(x)^2 &= (-0.001x^2 + 3.9)^2 \\
&= (-0.001x^2)^2 + 2 \cdot (-0.001x^2) \cdot 3.9 + 3.9^2 \\
&= 0.000001x^4 - 0.0078x^2 + 15.21 \\
R(x)^2 - r(x)^2 &= 0.000001x^4 - 0.0078x^2 + 15.21 \\
&\quad - \Big(0.00000064x^4 - 0.00592x^2 + 13.69\Big) \\
&= 0.00000036x^4 - 0.00188x^2 + 1.52
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_M &= \pi \int_0^{18} (0.00000036x^4 - 0.00188x^2 + 1.52)\, dx \\
&= \pi \left[0.000000072x^5 - \frac{47}{75000}x^3 + 1.52x\right]_0^{18} \\
&= \pi \left(0.000000072 \cdot 18^5 - \frac{47}{75000} \cdot 18^3 + 1.52 \cdot 18 - 0\right) \\
&\approx \pi\,(0.1360 - 3.6547 + 27.36) \\
&\approx 23.841\pi \approx 74.900
\end{aligned}$$

Das Materialvolumen beträgt also etwa $74.9\,\text{cm}^3$.

e) Das Material hat eine Dichte von $1.05\ \text{g/cm}^3$. Bestimmen Sie die Masse des Kunststoffs (in g). Begründen Sie anschließend kurz, ob das Ergebnis für eine Flasche „handlich“ wirkt.

$$\begin{aligned}
m &= \rho \cdot V_M \\
&= 1.05 \cdot 74.900 \\
&\approx 78.645
\end{aligned}$$

Die Masse des Kunststoffs beträgt rund 79 g. Das wirkt insgesamt handlich, da die Flasche dadurch vergleichsweise leicht bleibt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**