DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe mSmQux

Ein Schüler behauptet zur Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$:

„Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$. Dann $f(1) = 3$. Also WP$(1 \mid 3)$."

Prüfen Sie den Rechenweg: Was ist korrekt, was nicht? Korrigieren Sie das Ergebnis vollständig und geben Sie den Wendepunkt an. Wo würden Sie Teilpunkte geben und wo nicht?

Korrekte Rechnung

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$
$$f'''(x) = 6$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 12 && \mid +12 \\ 6x &= 12 && \mid :6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(2) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 1 = 1 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(2 \mid 1)$$

Bewertung des Rechenwegs

Am Rechenweg des Schülers ist richtig, dass zur Bestimmung des Wendepunktes die zweite Ableitung gleich 0 gesetzt werden muss.
Nicht korrekt ist jedoch bereits die zweite Ableitung: Statt $f''(x) = 6x - 6$ gilt richtig $f''(x) = 6x - 12$.
Deshalb ist auch die berechnete Wendestelle $x = 1$ falsch. Der Funktionswert $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 1 = 3$ ist zwar richtig berechnet, gehört aber nicht zu einer Wendestelle. Wegen $f'(1) = 0$ und $f''(1) = -6 < 0$ ist $(1 \mid 3)$ sogar der Hochpunkt von f.
Außerdem fehlt die Prüfung der hinreichenden Bedingung $f'''(x) \neq 0$.
Der korrekte Wendepunkt lautet also WP$(2 \mid 1)$.

Teilpunkte

Teilpunkte würde ich dafür geben, dass der Schüler grundsätzlich den richtigen Ansatz gewählt hat, nämlich den Wendepunkt über $f''(x) = 0$ bestimmen zu wollen.
Außerdem würde ich auch dafür Teilpunkte geben, dass mit der vom Schüler falsch berechneten zweiten Ableitung immerhin folgerichtig weitergerechnet wurde: Aus $f''(x) = 6x - 6$ wurde korrekt $x = 1$ bestimmt und anschließend der dazugehörige Funktionswert $f(1) = 3$ richtig berechnet.
Keine vollen Punkte würde ich trotzdem geben, weil die zweite Ableitung selbst falsch ist. Dadurch ist bereits die Wendestelle falsch, und damit kann auch der angegebene Wendepunkt nicht richtig sein.
Falls nach Rechenweg bewertet wird, wären also Teilpunkte für den richtigen Ansatz und das folgerichtige Weiterrechnen gerechtfertigt. Für das Endergebnis jedoch nicht.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**