DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe mJxUb3

Bestimmen Sie die Wendepunkte folgender Funktionen.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 6 && \mid +6 \\ 6x &= 6 && \mid :6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(1) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1 \mid 0)$$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x \\ f'''(x) &= 24x - 24 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 24x \\ &= x(12x - 24) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x - 24 && \mid +24 \\ 12x &= 24 && \mid :12 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 24 \cdot 0 - 24 = -24 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(2) &= 24 \cdot 2 - 24 = 24 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0 \mid 0) \\ f(2) &= 2^4 - 4 \cdot 2^3 = -16 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(2 \mid -16) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = 3x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 90x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 60x^3 - 30x^2 + 180x \\ f''(x) &= 60x^3 - 180x^2 - 60x + 180 \\ f'''(x) &= 180x^2 - 360x - 60 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 60x^3 - 180x^2 - 60x + 180 \quad | :60 \\ &= x^3 - 3x^2 - x + 3 \quad | x_1 = 1 \end{aligned}$$

	1	−3	−1	3
1		1	−2	−3
	1	−2	−3	0

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2x - 3 \\ x_{2/3} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(1) &= 180 \cdot 1^2 - 360 \cdot 1 - 60 = -240 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(3) &= 180 \cdot 3^2 - 360 \cdot 3 - 60 = 480 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(-1) &= 180 \cdot (-1)^2 - 360 \cdot (-1) - 60 = 480 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \cdot 1^5 - 15 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1^3 + 90 \cdot 1^2 \\ &= 68 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1 \mid 68) \\ f(3) &= 3 \cdot 3^5 - 15 \cdot 3^4 - 10 \cdot 3^3 + 90 \cdot 3^2 \\ &= 54 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(3 \mid 54) \\ f(-1) &= 3 \cdot (-1)^5 - 15 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3 + 90 \cdot (-1)^2 \\ &= 82 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(-1 \mid 82) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = 2x^6 - 15x^5 + 10x^4 + 80x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^5 - 75x^4 + 40x^3 + 240x^2 \\ f''(x) &= 60x^4 - 300x^3 + 120x^2 + 480x \\ f'''(x) &= 240x^3 - 900x^2 + 240x + 480 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 60x^4 - 300x^3 + 120x^2 + 480x \\ &= x(60x^3 - 300x^2 + 120x + 480) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 60x^3 - 300x^2 + 120x + 480 \quad | \, :60 \\ &= x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \quad | \, x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ -1 & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 6x + 8 \\ x_{3/4} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\ x_3 &= 4 \quad \vee \quad x_4 = 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 240 \cdot 0^3 - 900 \cdot 0^2 + 240 \cdot 0 + 480 \\ &= 480 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(-1) &= 240 \cdot (-1)^3 - 900 \cdot (-1)^2 + 240 \cdot (-1) + 480 \\ &= -900 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(4) &= 240 \cdot 4^3 - 900 \cdot 4^2 + 240 \cdot 4 + 480 \\ &= 2400 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(2) &= 240 \cdot 2^3 - 900 \cdot 2^2 + 240 \cdot 2 + 480 \\ &= -720 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0^6 - 15 \cdot 0^5 + 10 \cdot 0^4 + 80 \cdot 0^3 \\ &= 0 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0 \mid 0) \\ f(-1) &= 2 \cdot (-1)^6 - 15 \cdot (-1)^5 + 10 \cdot (-1)^4 + 80 \cdot (-1)^3 \\ &= -53 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-1 \mid -53) \\ f(4) &= 2 \cdot 4^6 - 15 \cdot 4^5 + 10 \cdot 4^4 + 80 \cdot 4^3 \\ &= 512 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(4 \mid 512) \\ f(2) &= 2 \cdot 2^6 - 15 \cdot 2^5 + 10 \cdot 2^4 + 80 \cdot 2^3 \\ &= 448 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_4(2 \mid 448) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 12x + 4 \\ f''(x) &= 12x - 12 \\ f'''(x) &= 12 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x - 12 && \mid +12 \\ 12x &= 12 && \mid :12 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(1) = 12 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\ &= 1 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1 \mid 1) \end{aligned}$$

f) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 18x \\ f''(x) &= 12x^2 + 12x - 18 \\ f'''(x) &= 24x + 12 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 + 12x - 18 && \mid :12 \\ &= x^2 + x - 1.5 \\ x_{1/2} &= -0.5 \pm \sqrt{(-0.5)^2 + 1.5} \\ x_1 &\approx 0.823 \quad \vee \quad x_2 \approx -1.823 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0.823) &= 24 \cdot 0.823 + 12 = 31.752 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-1.823) &= 24 \cdot (-1.823) + 12 = -31.752 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0.823) &= 0.823^4 + 2 \cdot 0.823^3 - 9 \cdot 0.823^2 \\ &\approx -4.522 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0.82 \mid -4.52) \\ f(-1.823) &= (-1.823)^4 + 2 \cdot (-1.823)^3 - 9 \cdot (-1.823)^2 \\ &\approx -30.982 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-1.82 \mid -30.98) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 4x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 20x^3 - 15x^2 + 50x + 4 \\ f''(x) &= 20x^3 - 60x^2 - 30x + 50 \\ f'''(x) &= 60x^2 - 120x - 30 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = 20x^3 - 60x^2 - 30x + 50 \quad | \, x_1 = -1$$

	20	− 60	− 30	50
− 1		− 20	80	− 50
	20	− 80	50	0

$$\begin{aligned} 0 &= 20x^2 - 80x + 50 \qquad | :20 \\ &= x^2 - 4x + 2.5 \\ x_{2/3} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 2.5} \\ x_2 &\approx 3.225 \quad \vee \quad x_3 \approx 0.775 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(-1) &= 60 \cdot (-1)^2 - 120 \cdot (-1) - 30 = 150 \neq 0 \qquad \checkmark \\ f'''(3.225) &= 60 \cdot 3.225^2 - 120 \cdot 3.225 - 30 \\ &\approx 207.038 \neq 0 \qquad \checkmark \\ f'''(0.775) &= 60 \cdot 0.775^2 - 120 \cdot 0.775 - 30 \\ &\approx -86.963 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 + 25 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) \\ &= 20 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(-1 \mid 20) \\ f(3.225) &= 3.225^5 - 5 \cdot 3.225^4 - 5 \cdot 3.225^3 + 25 \cdot 3.225^2 + 4 \cdot 3.225 \\ &\approx -86.802 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(3.23 \mid -86.8) \\ f(0.775) &= 0.775^5 - 5 \cdot 0.775^4 - 5 \cdot 0.775^3 + 25 \cdot 0.775^2 + 4 \cdot 0.775 \\ &\approx 14.264 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(0.78 \mid 14.26) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) $f(x) = 3x^6 - 6x^5 - 3x^4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 18x^5 - 30x^4 - 12x^3 \\ f''(x) &= 90x^4 - 120x^3 - 36x^2 \\ f'''(x) &= 360x^3 - 360x^2 - 72x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 90x^4 - 120x^3 - 36x^2 \\ &= x^2(90x^2 - 120x - 36) \qquad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 90x^2 - 120x - 36 \qquad | :6 \\ &= 15x^2 - 20x - 6 \qquad | :15 \\ &= x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{5} \\ x_{2/3} &= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{5}} \\ x_2 &\approx 1.586 \quad \vee \quad x_3 \approx -0.252 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 360 \cdot 0^3 - 360 \cdot 0^2 - 72 \cdot 0 = 0 \\ f'''(1.586) &= 360 \cdot 1.586^3 - 360 \cdot 1.586^2 - 72 \cdot 1.586 \\ &\approx 416.456 \neq 0 \qquad \checkmark \\ f'''(-0.252) &= 360 \cdot (-0.252)^3 - 360 \cdot (-0.252)^2 - 72 \cdot (-0.252) \\ &\approx -10.479 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Bei $x_1 = 0$ ist die hinreichende Bedingung nicht erfüllt. Für x nahe 0 ist $x^2 > 0$ und $90x^2 - 120x - 36 < 0$, also ist $f''(x) = x^2(90x^2 - 120x - 36)$ links und rechts von 0 negativ. f'' wechselt dort nicht das Vorzeichen, bei $x = 0$ liegt also kein Wendepunkt vor.

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(1.586) &= 3 \cdot 1.586^6 - 6 \cdot 1.586^5 - 3 \cdot 1.586^4 \\ &\approx -31.445 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.59 \mid -31.45) \\ f(-0.252) &= 3 \cdot (-0.252)^6 - 6 \cdot (-0.252)^5 - 3 \cdot (-0.252)^4 \\ &\approx -0.005 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-0.25 \mid -0.01) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i) $f(x) = x^6 - 12x^4 + 9x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^5 - 48x^3 + 18x \\ f''(x) &= 30x^4 - 144x^2 + 18 \\ f'''(x) &= 120x^3 - 288x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 30x^4 - 144x^2 + 18 && | :30 \\ &= x^4 - 4.8x^2 + 0.6 && | x^2 = z \\ &= z^2 - 4.8z + 0.6 \\ z_{1/2} &= 2.4 \pm \sqrt{2.4^2 - 0.6} \\ z_1 \approx 4.672 \quad &\vee \quad z_2 \approx 0.128 && | x = \sqrt{z} \\ x_1 \approx 2.161 \quad &\vee \quad x_2 \approx -2.161 \quad \vee \quad x_3 \approx 0.358 \quad \vee \quad x_4 \approx -0.358 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(2.161) &= 120 \cdot 2.161^3 - 288 \cdot 2.161 \approx 588.636 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-2.161) &= 120 \cdot (-2.161)^3 - 288 \cdot (-2.161) \\ &\approx -588.636 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(0.358) &= 120 \cdot 0.358^3 - 288 \cdot 0.358 \approx -97.598 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-0.358) &= 120 \cdot (-0.358)^3 - 288 \cdot (-0.358) \\ &\approx 97.598 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(2.161) &= 2.161^6 - 12 \cdot 2.161^4 + 9 \cdot 2.161^2 \\ &\approx -117.826 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(2.16 \mid -117.83) \\ f(-2.161) &= (-2.161)^6 - 12 \cdot (-2.161)^4 + 9 \cdot (-2.161)^2 \\ &\approx -117.826 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-2.16 \mid -117.83) \\ f(0.358) &= 0.358^6 - 12 \cdot 0.358^4 + 9 \cdot 0.358^2 \\ &\approx 0.958 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(0.36 \mid 0.96) \\ f(-0.358) &= (-0.358)^6 - 12 \cdot (-0.358)^4 + 9 \cdot (-0.358)^2 \\ &\approx 0.958 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_4(-0.36 \mid 0.96) \end{aligned}$$

j) $f(x) = 2x^2 + 4x + 8$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x + 4 \\ f''(x) &= 4 \\ f'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = 4 \qquad \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

Die notwendige Bedingung kann nicht erfüllt werden. Die Funktion besitzt also keinen Wendepunkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**