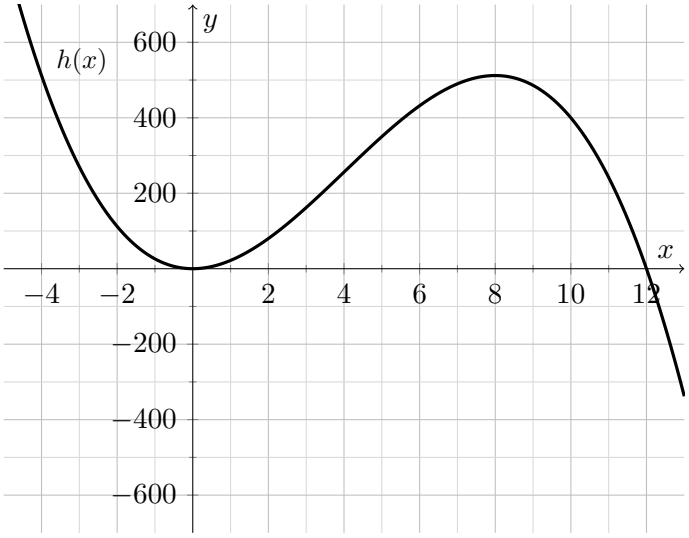
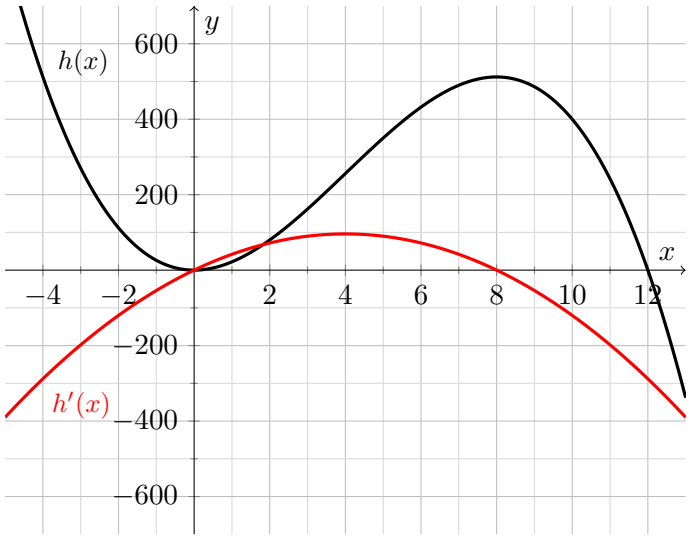
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe mJMm36

Das abgebildete Koordinatensystem zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion $h(x)$.



a) Skizzieren Sie – ausgehend vom Verlauf von $h(x)$ – einen möglichen Graphen der Ableitung $h'(x)$. Nutzen Sie dafür das oben abgebildete Koordinatensystem, in dem $h(x)$ bereits eingezeichnet ist.



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Die Funktion $f(t) = -2t^3 + 24t^2$ hat einen ähnlichen Verlauf wie $h(x)$. Im Modell beschreibt $f(t)$ (zwischen den Nullstellen) die Wassermenge in einem Pumpspeicherwerk. Dabei gilt: $t \geq 0$ Zeit in Stunden, $f(t)$ Wassermenge in m^3. Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem dieses Modell sinnvoll ist.

$f(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -2t^3 + 24t^2 \\ &= t^2(-2t + 24) \quad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -2t + 24 \quad | \, +2t \\ 2t &= 24 \quad | \, :2 \\ t_2 &= 12 \end{aligned}$$

Da die Zeit nur für $t \geq 0$ betrachtet wird und die Wassermenge zwischen den Nullstellen beschrieben werden soll, ist das Modell sinnvoll für $0 \leq t \leq 12$.

c) Zu welchem Zeitpunkt (nach $t = 0$) ist die Wassermenge am größten? Bestimmen Sie außerdem den maximalen Wasserbestand.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -6t^2 + 48t \\ f''(t) &= -12t + 48 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -6t^2 + 48t \\ &= t(-6t + 48) \quad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -6t + 48 \quad | \, +6t \\ 6t &= 48 \quad | \, :6 \\ t_2 &= 8 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(t) = 0 \quad \wedge \quad f''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= -12 \cdot 0 + 48 = 48 > 0 \quad \Rightarrow \text{TP} \\ f''(8) &= -12 \cdot 8 + 48 = -48 < 0 \quad \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(t) = y$

$$f(8) = -2 \cdot 8^3 + 24 \cdot 8^2 = 512 \quad \Rightarrow \text{HP}(8 \mid 512)$$

Die Wassermenge ist nach 8 Stunden am größten. Der maximale Wasserbestand beträgt 512 m^3.

d) Erklären Sie im Kontext des Pumpspeicherwerks, was mit „mittlerer Änderungsrate“ und „lokaler Änderungsrate“ der Funktion f gemeint ist.

Die **mittlere Änderungsrate** gibt an, um wie viele Kubikmeter sich die Wassermenge im Durchschnitt pro Stunde in einem bestimmten Zeitintervall ändert.

Die **lokale Änderungsrate** gibt an, wie stark sich die Wassermenge zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt momentan ändert. Sie beschreibt also die momentane Zu- oder Abnahme der Wassermenge.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) Bestimmen Sie die Steigung im Wendepunkt des Graphen von f.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -6t^2 + 48t \\ f''(t) &= -12t + 48 \\ f'''(t) &= -12 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -12t + 48 && | +12t \\ 12t &= 48 && | :12 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(t) = 0 \quad \wedge \quad f'''(t) \neq 0$

$$f'''(4) = -12 \neq 0 \qquad \checkmark$$

Steigung im Wendepunkt:

$$f'(4) = -6 \cdot 4^2 + 48 \cdot 4 = -96 + 192 = 96$$

f) Deuten Sie das Ergebnis aus e) im Sachzusammenhang: Was sagt es über den Ablauf im Pumpspeicherwerk aus?

Die Steigung im Wendepunkt beträgt 96 $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$. Nach 4 Stunden nimmt die Wassermenge im Pumpspeicherwerk am schnellsten zu. Bis zu diesem Zeitpunkt wird der Speicher immer schneller gefüllt. Danach steigt die Wassermenge zwar weiter an, aber nicht mehr so stark wie zuvor.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**