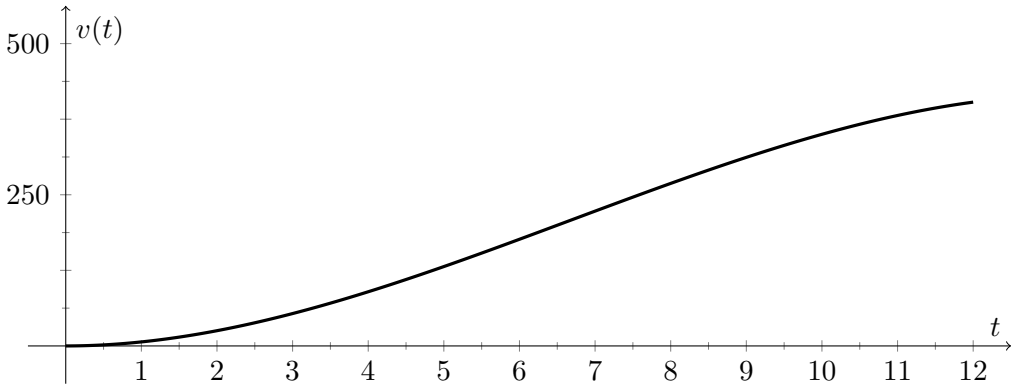
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe mE3LRN

Bei einem Baum wird an einem klaren Sommertag die Sauerstoffproduktion im Tagesverlauf beobachtet. Da Licht und Temperatur die Photosynthese stark beeinflussen, verändert sich die Produktion über den Tag deutlich: Morgens steigt sie an, erreicht um die Mittagszeit häufig ihr Maximum und nimmt am Nachmittag wieder ab.
Für den Zeitraum zwischen 06:00 Uhr (Sonnenaufgang) und 18:00 Uhr (Sonnenuntergang) liegt ein Messprotokoll vor, das im unten stehenden Graphen dargestellt ist.
Dabei gilt:

- t beschreibt die Anzahl der Stunden seit 06:00 Uhr (also $t = 0$ entspricht 06:00 Uhr).
- $v(t)$ gibt die bis zum Zeitpunkt t insgesamt produzierte Sauerstoffmenge in Litern an (kumulierte Gesamtmenge).

Der Verlauf lässt sich näherungsweise modellieren durch $v(t) = -0.35t^3 + 7t^2$.



a) Zeigen Sie, dass der Baum bis 13:00 Uhr insgesamt 223 Liter Sauerstoff produziert hat.

13:00 Uhr entspricht $t = 7$.

$$\begin{aligned} v(7) &= -0.35 \cdot 7^3 + 7 \cdot 7^2 \\ &= -120.05 + 343 \\ &= 222.95 \approx 223 \end{aligned}$$

Der Baum hat bis 13:00 Uhr insgesamt etwa 223 Liter Sauerstoff produziert.

b) Bestimmen Sie, wie viel Sauerstoff der Baum zwischen 13:00 Uhr und 17:00 Uhr durchschnittlich pro Stunde abgibt.

13:00 Uhr entspricht $t = 7$, 17:00 Uhr entspricht $t = 11$.

$$\begin{aligned} v(7) &= 222.95 \\ v(11) &= -0.35 \cdot 11^3 + 7 \cdot 11^2 \\ &= -465.85 + 847 \\ &= 381.15 \end{aligned}$$

$$m = \frac{v(11) - v(7)}{11 - 7} = \frac{381.15 - 222.95}{4} = \frac{158.2}{4} = 39.55$$

Der Baum gibt zwischen 13:00 Uhr und 17:00 Uhr durchschnittlich 39.55 Liter Sauerstoff pro Stunde ab.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Vergleichen Sie die Produktion am Nachmittag: Um wie viel Prozent ist die durchschnittliche Sauerstoffproduktion zwischen 15:00 Uhr und 17:00 Uhr niedriger als zwischen 13:00 Uhr und 15:00 Uhr? (Runden Sie auf eine Nachkommastelle.)

15:00 Uhr entspricht $t = 9$.

$$\begin{aligned} v(9) &= -0.35 \cdot 9^3 + 7 \cdot 9^2 \\ &= -255.15 + 567 \\ &= 311.85 \end{aligned}$$

Durchschnittliche Produktion zwischen 13:00 Uhr und 15:00 Uhr:

$$m_1 = \frac{v(9) - v(7)}{9 - 7} = \frac{311.85 - 222.95}{2} = \frac{88.9}{2} = 44.45$$

Durchschnittliche Produktion zwischen 15:00 Uhr und 17:00 Uhr:

$$m_2 = \frac{v(11) - v(9)}{11 - 9} = \frac{381.15 - 311.85}{2} = \frac{69.3}{2} = 34.65$$

Prozentuale Abnahme:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1} = \frac{44.45 - 34.65}{44.45} = \frac{9.8}{44.45} \approx 0.220 = 22.0\,\%$$

Die durchschnittliche Sauerstoffproduktion ist zwischen 15:00 Uhr und 17:00 Uhr um 22.0 % niedriger als zwischen 13:00 Uhr und 15:00 Uhr.

d) Bestimmen Sie die Steigung von v an der Stelle $t = 5$ und erläutern Sie kurz die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang.

$$\begin{aligned} v'(t) &= -1.05t^2 + 14t \\ v'(5) &= -1.05 \cdot 5^2 + 14 \cdot 5 \\ &= -26.25 + 70 \\ &= 43.75 \end{aligned}$$

Die Steigung an der Stelle $t = 5$ beträgt 43.75 $\frac{\text{L}}{\text{h}}$. Um 11:00 Uhr produziert der Baum also in diesem Moment Sauerstoff mit einer momentanen Rate von 43.75 Litern pro Stunde.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) Vermuten Sie zunächst begründet, wann der Baum am meisten Sauerstoff produziert. Ermitteln Sie den Zeitpunkt anschließend rechnerisch.

Vermutung: Die Produktion ist dort am größten, wo der Graph von v am steilsten ansteigt. Das ist im Graphen etwa zwischen $t = 6$ und $t = 7$ der Fall, also um die Mittagszeit (wie im Text beschrieben).

Da $v(t)$ die kumulierte Gesamtmenge beschreibt, gibt die Ableitung $v'(t)$ die momentane Sauerstoffproduktion an. Gesucht ist also das Maximum von $v'(t)$, also der Wendepunkt von v.

$$\begin{aligned} v'(t) &= -1.05t^2 + 14t \\ v''(t) &= -2.1t + 14 \\ v'''(t) &= -2.1 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $v''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -2.1t + 14 && | +2.1t \\ 2.1t &= 14 && | :2.1 \\ t &= \frac{20}{3} \approx 6.667 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $v''(t) = 0 \quad \wedge \quad v'''(t) \neq 0$

$$v'''\left(\frac{20}{3}\right) = -2.1 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP von } v'$$

Der Baum produziert nach etwa 6.67 Stunden am meisten Sauerstoff, also ungefähr um 12:40 Uhr.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**