DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe kSPTVa

Gegeben sind jeweils drei Punkte, durch die eine quadratische Funktion verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a) $P(2 \mid 5)$, $Q(-1 \mid 5)$, $R(3 \mid 9)$

$$\begin{aligned} 5 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c && = 4a + 2b + c \\ 5 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c && = a - b + c \\ 9 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c && = 9a + 3b + c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ 4 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 4 \cdot \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 3 & 15 \\ 0 & -6 & -5 & -9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{III} - \text{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -8c = -24 && \mid :(-8) \\ & c = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -6b + 3 \cdot 3 = 15 && \mid -9 \\ & -6b = 6 && \mid :(-6) \\ & b = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 4a + 2 \cdot (-1) + 3 = 5 && \mid -1 \\ & 4a = 4 && \mid :4 \\ & a = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - x + 3$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $P(1 \mid -3)$, $Q(3 \mid -7)$, $R(-2 \mid 6)$

$$\begin{aligned} -3 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & &= a + b + c \\ -7 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & &= 9a + 3b + c \\ 6 &= a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & &= 4a - 2b + c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 9 & 3 & 1 & -7 \\ 4 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - 9 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 4 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & -8 & 20 \\ 0 & -6 & -3 & 18 \end{array}\right) \quad \text{III} - \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & 5c = -2 && \mid :5 \\ & c = -0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -6b - 8 \cdot (-0.4) = 20 && \mid -3.2 \\ & -6b = 16.8 && \mid :(-6) \\ & b = -2.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & a + (-2.8) + (-0.4) = -3 && \mid +3.2 \\ & a = 0.2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0.2x^2 - 2.8x - 0.4$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $P(0 \mid 1)$, $Q(4 \mid 1)$, $R(-2 \mid 5)$

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & &= c \\ 1 &= a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c & &= 16a + 4b + c \\ 5 &= a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & &= 4a - 2b + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} && c = 1 \\ &\text{II} && 16a + 4b + 1 = 1 && \mid -1 \\ & && 16a + 4b = 0 \\ &\text{III} && 4a - 2b + 1 = 5 && \mid -1 \\ & && 4a - 2b = 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 16 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{array}\right) \qquad 4 \cdot \text{II} - \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 16 & 4 & 0 \\ 0 & -12 & 16 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &\text{II} && -12b = 16 && \mid :(-12) \\ & && b = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} && 16a + 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 0 && \mid +\frac{16}{3} \\ & && 16a = \frac{16}{3} && \mid :16 \\ & && a = \frac{1}{3} \\ & && \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $P(2 \mid 8)$, $Q(-1 \mid -1)$, $R(3 \mid 5)$

$$\begin{aligned} 8 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & &= 4a + 2b + c \\ -1 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & &= a - b + c \\ 5 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 4 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 4 \cdot \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -6 & 3 & -12 \\ 0 & -6 & -5 & -52 \end{array}\right) \quad \text{III} - \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -6 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -8 & -40 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -8c = -40 && \mid :(-8) \\ & c = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -6b + 3 \cdot 5 = -12 && \mid -15 \\ & -6b = -27 && \mid :(-6) \\ & b = 4.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 4a + 2 \cdot 4.5 + 5 = 8 && \mid -14 \\ & 4a = -6 && \mid :4 \\ & a = -1.5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = -1.5x^2 + 4.5x + 5$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $P(0 \mid 1)$, $Q(-2 \mid 9)$, $R(3 \mid 19)$

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & &= c \\ 9 &= a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & &= 4a - 2b + c \\ 19 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} && c = 1 \\ &\text{II} && 4a - 2b + 1 = 9 && \mid -1 \\ & && 4a - 2b = 8 \\ &\text{III} && 9a + 3b + 1 = 19 && \mid -1 \\ & && 9a + 3b = 18 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 8 \\ 9 & 3 & 18 \end{array}\right) \qquad 4 \cdot \text{II} - 9 \cdot \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 8 \\ 0 & 30 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &\text{II} && 30b = 0 && \mid :30 \\ & && b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} && 4a - 2 \cdot 0 = 8 \\ & && 4a = 8 && \mid :4 \\ & && a = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + 1$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $P(1 \mid -1.5)$, $Q(3 \mid -3)$, $R(-1 \mid -0.5)$

$$\begin{aligned} -1.5 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & &= a + b + c \\ -3 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & &= 9a + 3b + c \\ -0.5 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & &= a - b + c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1.5 \\ 9 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -0.5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - 9 \cdot \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1.5 \\ 0 & -6 & -8 & 10.5 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -2b = 1 && \mid :(-2) \\ & b = -0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -6 \cdot (-0.5) - 8c = 10.5 && \mid -3 \\ & -8c = 7.5 && \mid :(-8) \\ & c = -\frac{15}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & a + (-0.5) + \left(-\frac{15}{16}\right) = -1.5 && \mid +\frac{23}{16} \\ & a = -\frac{1}{16} \\ & \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{16}x^2 - 0.5x - \frac{15}{16} \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $P(-1 \mid 8)$, $Q(2 \mid 6)$, $R(3 \mid 10)$

$$\begin{aligned} 8 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c && = a - b + c \\ 6 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c && = 4a + 2b + c \\ 10 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c && = 9a + 3b + c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 9 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & -26 \\ 0 & 12 & -8 & -62 \end{array}\right) \quad \text{III} - 2 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & -26 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -2c = -10 && \mid :(-2) \\ & c = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & 6b - 3 \cdot 5 = -26 && \mid +15 \\ & 6b = -11 && \mid :6 \\ & b = -\frac{11}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & a - \left(-\frac{11}{6}\right) + 5 = 8 \\ & a + \frac{41}{6} = 8 && \mid -\frac{41}{6} \\ & a = \frac{7}{6} \\ & \Rightarrow f(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + 5 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) $P(0 \mid 5)$, $Q(-3 \mid 2)$, $R(2 \mid -1)$

$$\begin{aligned} 5 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & &= c \\ 2 &= a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c & &= 9a - 3b + c \\ -1 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & &= 4a + 2b + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} && c = 5 \\ &\text{II} && 9a - 3b + 5 = 2 && \mid -5 \\ & && 9a - 3b = -3 \\ &\text{III} && 4a + 2b + 5 = -1 && \mid -5 \\ & && 4a + 2b = -6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -3 & -3 \\ 4 & 2 & -6 \end{array}\right) \qquad 9 \cdot \text{II} - 4 \cdot \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 30 & -42 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &\text{II} && 30b = -42 && \mid :30 \\ & && b = -1.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} && 9a - 3 \cdot (-1.4) = -3 && \mid -4.2 \\ & && 9a = -7.2 && \mid :9 \\ & && a = -0.8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = -0.8x^2 - 1.4x + 5$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i) $P(-3 \mid 4)$, $Q(1 \mid -2)$, $R(4 \mid 7)$

$$\begin{aligned} 4 &= a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c &&= 9a - 3b + c \\ -2 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c &&= a + b + c \\ 7 &= a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c &&= 16a + 4b + c \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 16 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 9 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 9 \cdot \text{III} - 16 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 12 & 8 & -22 \\ 0 & 84 & -7 & -1 \end{array}\right) \quad \text{III} - 7 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 12 & 8 & -22 \\ 0 & 0 & -63 & 153 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -63c = 153 && \mid :(-63) \\ & c = -\frac{17}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & 12b + 8 \cdot \left(-\frac{17}{7}\right) = -22 && \mid +\frac{136}{7} \\ & 12b = -\frac{18}{7} && \mid :12 \\ & b = -\frac{3}{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 9a - 3 \cdot \left(-\frac{3}{14}\right) + \left(-\frac{17}{7}\right) = 4 \\ & 9a - \frac{25}{14} = 4 && \mid +\frac{25}{14} \\ & 9a = \frac{81}{14} && \mid :9 \\ & a = \frac{9}{14} \\ & \Rightarrow f(x) = \frac{9}{14}x^2 - \frac{3}{14}x - \frac{17}{7} \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

j) $P(2 \mid 3)$, $Q(-2 \mid -5)$, $R(0 \mid 4)$

$$\begin{aligned} 3 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & &= 4a + 2b + c \\ -5 &= a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & &= 4a - 2b + c \\ 4 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & c = 4 \\ \text{I} \quad & 4a + 2b + 4 = 3 & &\mid -4 \\ & 4a + 2b = -1 \\ \text{II} \quad & 4a - 2b + 4 = -5 & &\mid -4 \\ & 4a - 2b = -9 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -9 \end{array}\right) \qquad \text{II} - \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -4b = -8 & &\mid :(-4) \\ & b = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 4a + 2 \cdot 2 = -1 & &\mid -4 \\ & 4a = -5 & &\mid :4 \\ & a = -\frac{5}{4} = -1.25 \\ \Rightarrow & f(x) = -1.25x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**