DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe kCaRKZ

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$.

a) Bestimmen Sie die Wendestelle rechnerisch. Nutzen Sie dazu die notwendige und hinreichende Bedingung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 12x - 9 \\ f''(x) &= -6x + 12 \\ f'''(x) &= -6 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -6x + 12 && | +6x \\ 6x &= 12 && | :6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(2) = -6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

Die Wendestelle liegt bei $x = 2$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(2 \mid 0)$$

c) Bestimmen Sie die Tangente im Wendepunkt.

Steigung im Wendepunkt:

$$m = f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 9 = 3$$

Ansatz: $t(x) = mx + b = 3x + b$

Da die Tangente durch den Wendepunkt $\mathrm{WP}_1(2 \mid 0)$ verläuft, gilt:

$$\begin{aligned} t(2) &= 0 \\ 3 \cdot 2 + b &= 0 && | -6 \\ b &= -6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t(x) = 3x - 6$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Überprüfen Sie, ob der Wendepunkt zwischen den Extrempunkten liegt.

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -3x^2 + 12x - 9 \quad | :(-3) \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_1 = 3 \quad &\vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(3) &= -6 \cdot 3 + 12 = -6 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \\ f''(1) &= -6 \cdot 1 + 12 = 6 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(3) &= -3^3 + 6 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 2 = 2 \qquad \Rightarrow \text{HP}(3 \mid 2) \\ f(1) &= -1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 = -2 \qquad \Rightarrow \text{TP}(1 \mid -2) \end{aligned}$$

Die Extremstellen liegen also bei $x = 1$ und $x = 3$. Da die Wendestelle bei $x = 2$ liegt, liegt der Wendepunkt zwischen den beiden Extrempunkten (genau in der Mitte).

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**