DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe jf3dty

Bestimmen Sie jeweils die Wendepunkte.

a) $f(x) = 0.05x^5 - 0.25x^4 + 2x^2$

$$f'(x) = 0.25x^4 - x^3 + 4x$$
$$f''(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$
$$f'''(x) = 3x^2 - 6x$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = x^3 - 3x^2 + 4 \quad | \, x_1 = -1$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 - 4x + 4$$
$$x_{2/3} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4}$$
$$x_2 = 2$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(-1) = 9 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''(2) = 0$$

Bei $x = 2$ ist die hinreichende Bedingung nicht erfüllt. Dort liegt kein Wendepunkt vor.

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(-1) = 1.7 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(-1 \mid 1.7)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 3x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0.25x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2.5x^2 - 6x \\ f''(x) &= -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \\ f'''(x) &= -3x^2 + 4x + 5 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \quad | \, x_1 = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2 & 5 & -6 \\ -2 & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & -1 & 4 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 4x - 3 \qquad | :(-1) \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{2/3} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(-2) &= -15 \neq 0 \qquad \checkmark \\ f'''(3) &= -10 \neq 0 \qquad \checkmark \\ f'''(1) &= 6 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(-2) &= -14.4 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(-2 \mid -14.4) \\ f(3) &= -3.15 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(3 \mid -3.15) \\ f(1) &= -2.05 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(1 \mid -2.05) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = -0.1x^5 - \frac{1}{6}x^4 + 3x^3 + 9x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0.5x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 9x^2 + 18x \\ f''(x) &= -2x^3 - 2x^2 + 18x + 18 \\ f'''(x) &= -6x^2 - 4x + 18 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = -2x^3 - 2x^2 + 18x + 18 \quad | \, x_1 = -3$$

	-2	-2	18	18
-3		6	-12	-18
	-2	4	6	0

$$\begin{aligned} 0 &= -2x^2 + 4x + 6 \qquad | :(-2) \\ &= x^2 - 2x - 3 \\ x_{2/3} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(-3) &= -24 \neq 0 \qquad \checkmark \\ f'''(3) &= -48 \neq 0 \qquad \checkmark \\ f'''(-1) &= 16 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(-3) &= 10.8 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(-3 \mid 10.8) \\ f(3) &= 124.2 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(3 \mid 124.2) \\ f(-1) &\approx 5.933 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(-1 \mid 5.93) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = 0.15x^5 - 0.75x^4 - 0.125x^3 + 5.625x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.75x^4 - 3x^3 - 0.375x^2 + 11.25x \\ f''(x) &= 3x^3 - 9x^2 - 0.75x + 11.25 \\ f'''(x) &= 9x^2 - 18x - 0.75 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = 3x^3 - 9x^2 - 0.75x + 11.25 \quad | \, x_1 = -1$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{array}{r|cccc} & 3 & -9 & -\frac{3}{4} & \frac{45}{4} \\ -1 & & -3 & 12 & -\frac{45}{4} \\ \hline & 3 & -12 & \frac{45}{4} & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 12x + 11.25 \quad | :3 \\ &= x^2 - 4x + 3.75 \\ x_{2/3} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3.75} \\ x_2 &= 2.5 \quad \vee \quad x_3 = 1.5 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(-1) &= 26.25 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(2.5) &= 10.5 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(1.5) &= -7.5 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4.85 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(-1 \mid 4.85) \\ f(2.5) &\approx 18.555 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(2.5 \mid 18.55) \\ f(1.5) &\approx 9.577 && \Rightarrow \mathrm{WP}_3(1.5 \mid 9.58) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.5x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 \\ f''(x) &= 2x^3 - 2x^2 - 4x \\ f'''(x) &= 6x^2 - 4x - 4 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^3 - 2x^2 - 4x \\ &= x(2x^2 - 2x - 4) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 2x - 4 \quad | :2 \\ &= x^2 - x - 2 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 2} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= -4 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(2) &= 12 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(-1) &= 6 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0 \mid 0) \\ f(2) &= -4.8 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(2 \mid -4.8) \\ f(-1) &= 0.4 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(-1 \mid 0.4) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = 0.05x^5 - \frac{1}{6}x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.25x^4 - 0.5x^2 \\ f''(x) &= x^3 - x \\ f'''(x) &= 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - x \\ &= x(x^2 - 1) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 1 && | \; +1 \\ x^2 &= 1 && | \; \sqrt{} \\ x_2 &= 1 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= -1 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(1) &= 2 \neq 0 && \checkmark \\ f'''(-1) &= 2 \neq 0 && \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0 \mid 0) \\ f(1) &\approx -0.117 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(1 \mid -0.12) \\ f(-1) &\approx 0.117 && \Rightarrow \mathrm{WP}_3(-1 \mid 0.12) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + 3x^2$

$$f'(x) = 0.25x^4 - 3.5x^2 + 6x$$
$$f''(x) = x^3 - 7x + 6$$
$$f'''(x) = 3x^2 - 7$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = x^3 - 7x + 6 \quad | \, x_1 = -3$$

	1	0	− 7	6
− 3		− 3	9	− 6
	1	− 3	2	0

$$0 = x^2 - 3x + 2$$
$$x_{2/3} = 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 2}$$
$$x_2 = 2 \quad \vee \quad x_3 = 1$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(-3) = 20 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''(2) = 5 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''(1) = -4 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(-3) = 46.35 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(-3 \mid 46.35)$$
$$f(2) \approx 4.267 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(2 \mid 4.27)$$
$$f(1) \approx 1.883 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(1 \mid 1.88)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) $f(x) = 0.25x^4 - 0.5x^3 - 9x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 1.5x^2 - 18x \\ f''(x) &= 3x^2 - 3x - 18 \\ f'''(x) &= 6x - 3 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 3x - 18 \qquad | :3 \\ &= x^2 - x - 6 \\ x_{1/2} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6} \\ x_1 = 3 \quad &\vee \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(3) &= 15 \neq 0 \qquad \checkmark \\ f'''(-2) &= -15 \neq 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(3) &= -74.25 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(3 \mid -74.25) \\ f(-2) &= -28 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-2 \mid -28) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**