DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe iSjN5j

In der Medizin wird modellhaft beschrieben, wie stark ein Körper auf ein Medikament reagiert. Für die Dosis x (z. B. in mg) gilt die Reaktionsfunktion

$$R(x) = 0.1x^2(4 - x).$$

Die momentane Empfindlichkeit gegenüber einer Dosisänderung wird durch $R'(x)$ beschrieben.

a) Bestimmen Sie die Dosiswerte, bei denen keine Reaktion auftritt.

$$\begin{aligned} 0 &= 0.1x^2(4 - x) && \mid x_1 = 0 \\ \\ 0 &= 4 - x && \mid +x \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Bei 0 mg tritt logischerweise keine Reaktion auf, da ohne Medikament auch keine Wirkung eintreten kann.

Aber auch bei 4 mg ist die Reaktion gleich null. Dies könnte zum Beispiel folgende Ursachen haben:

- Die Dosis ist bereits so hoch, dass der Körper nicht mehr positiv reagiert und die Wirkung wieder zusammenbricht.
- Es treten Gegenregulationen oder Sättigungseffekte auf, sodass trotz weiterer Erhöhung der Dosis keine messbare Reaktion mehr erfolgt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Bei welcher Dosis ist die Reaktion des Körpers maximal?

$$\begin{aligned} R(x) &= 0.1x^2(4-x) \\ &= -0.1x^3 + 0.4x^2 \\ R'(x) &= -0.3x^2 + 0.8x \\ R''(x) &= -0.6x + 0.8 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $R'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.3x^2 + 0.8x \\ &= x(-0.3x + 0.8) \quad | \, x_1 = 0 \\ \\ 0 &= -0.3x + 0.8 \quad | \, +0.3x \\ 0.3x &= 0.8 \quad | \, :0.3 \\ x_2 &= \frac{8}{3} \approx 2.667 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $R'(x) = 0 \quad \wedge \quad R''(x) \neq 0$

$$R''(0) = 0.8 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

$$R''\left(\frac{8}{3}\right) = -0.6 \cdot \frac{8}{3} + 0.8 = -0.8 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $R(x) = y$

$$R\left(\frac{8}{3}\right) = 0.1 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{128}{135} \approx 0.948 \qquad \Rightarrow \text{HP}(2.67 \mid 0.95)$$

Die Reaktion des Körpers ist also bei der Dosis $x = \frac{8}{3} \approx 2.67\,\text{mg}$ maximal.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Für welche Dosis ist die Empfindlichkeit am größten?

Da die Empfindlichkeit durch $R'(x)$ beschrieben wird, ist sie dort am größten, wo $R(x)$ einen Wendepunkt besitzt.

$$R'(x) = -0.3x^2 + 0.8x$$
$$R''(x) = -0.6x + 0.8$$
$$R'''(x) = -0.6$$

notw. Bed.: $R''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.6x + 0.8 && | +0.6x \\ 0.6x &= 0.8 && | :0.6 \\ x &= \frac{4}{3} \approx 1.333 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $R''(x) = 0 \quad \wedge \quad R'''(x) \neq 0$

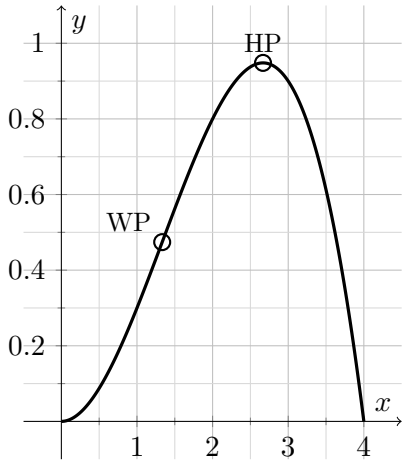
$$R'''\left(\frac{4}{3}\right) = -0.6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $R(x) = y$

$$R\left(\frac{4}{3}\right) = 0.1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{135} \approx 0.474 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.33 \mid 0.47)$$

Wegen $R''' < 0$ hat R' an dieser Stelle ein Maximum. Die Empfindlichkeit ist also bei der Dosis $x = \frac{4}{3} \approx 1.33\,\mathrm{mg}$ am größten.

d) Skizzieren Sie den Graphen im Intervall $[0\ ;\ 4]$.



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**