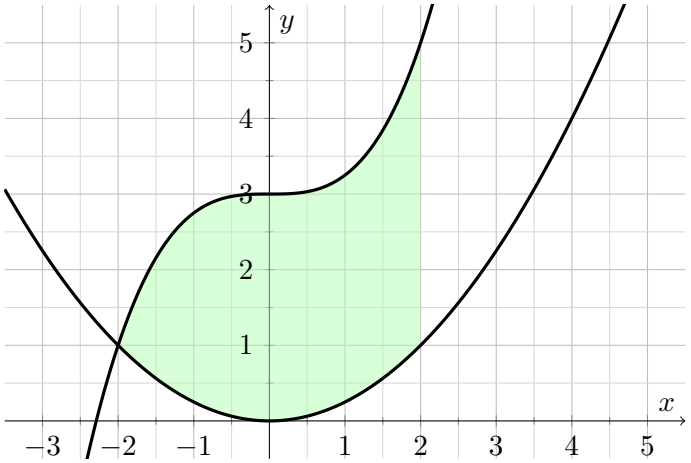
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe hvGGLQ

Die grüne Fläche wird durch die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 3 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{4}x^2$$

begrenzt. Als betrachteter Bereich gilt das Intervall von $x = -2$ (Schnittpunkt der Graphen) bis $x = 2$.



a) Zeigen Sie, dass die Graphen außerhalb dieses Intervalls keinen weiteren Schnittpunkt besitzen.

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= \frac{1}{4}x^3 + 3 - \frac{1}{4}x^2 \\ &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3 \quad | \cdot 4 \\ &= x^3 - x^2 + 12 \qquad | \, x_1 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & 12 \\ -2 & & -2 & 6 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 3x + 6 \\ x_{2/3} &= 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 6} \\ &= 1.5 \pm \sqrt{-3.75} \end{aligned}$$

Der Term unter der Wurzel ist negativ. $\Rightarrow$ keine weiteren Schnittpunkte

Die Graphen schneiden sich also nur bei $x = -2$ und besitzen außerhalb des Intervalls keinen weiteren Schnittpunkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Bestimmen Sie anschließend den Flächeninhalt der von f und g im Intervall $[-2;2]$ eingeschlossenen Fläche.

Nach a) hat $d(x)$ im Intervall $[-2;2]$ nur die Nullstelle $x=-2$, die Fläche besteht also aus einem Stück.

$$d(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + 3x\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{1}{16}\cdot 2^4 - \frac{1}{12}\cdot 2^3 + 3\cdot 2 - \left(\frac{1}{16}\cdot(-2)^4 - \frac{1}{12}\cdot(-2)^3 + 3\cdot(-2)\right) \\
&= 1 - \frac{2}{3} + 6 - \left(1 + \frac{2}{3} - 6\right) \\
&= \frac{19}{3} - \left(-\frac{13}{3}\right) \\
&= \frac{32}{3} \approx 10.667
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt etwa 10.667 FE.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**