DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe gLwCzb

Eine Drohne soll eine Ausgrabungsstelle über mehrere Monate hinweg täglich fotografieren, um den Fortschritt der Arbeiten lückenlos zu dokumentieren. Damit die Aufnahmen von Tag zu Tag möglichst identisch sind, wird eine feste Flugroute samt Höhenprofil geplant und in die Drohne einprogrammiert. Zur rechnerischen Untersuchung wird die Flughöhe durch eine Funktion beschrieben: $h(x)$ gibt die Höhe der Drohne in Metern an, x die Entfernung vom Startpunkt (in Metern). Es wird angenommen, dass die Drohne ihre Höhe entlang der Strecke so anpasst, dass zu jedem x genau eine Flughöhe gehört.
Es gilt:

$$h(x) = -0.005x^3 + 0.125x^2 + 0.75x$$

a) Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Drohne laut Modell Bodenkontakt hat. Wie weit ist die Drohne geflogen? (Tipp: Wählen Sie nur die dafür sinnvollen Nullstellen aus.)

$$\begin{aligned} 0 &= -0.005x^3 + 0.125x^2 + 0.75x \\ &= x(-0.005x^2 + 0.125x + 0.75) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.005x^2 + 0.125x + 0.75 \qquad | \, :(-0.005) \\ &= x^2 - 25x - 150 \\ x_{2/3} &= 12.5 \pm \sqrt{12.5^2 + 150} \\ x_2 &= 30 \quad \vee \quad x_3 = -5 \end{aligned}$$

Sachlich sinnvoll sind nur die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 30$, da negative Entfernungen hier nicht betrachtet werden. Die Drohne hat also am Startpunkt und nach 30 Metern Bodenkontakt. Damit beträgt die Flugstrecke 30 m.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Wird eine vorgeschriebene maximale Flughöhe von 25 m eingehalten?

$$h'(x) = -0.015x^2 + 0.25x + 0.75$$
$$h''(x) = -0.03x + 0.25$$

notw. Bed.: $h'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.015x^2 + 0.25x + 0.75 \qquad | :(-0.015) \\ &= x^2 - \frac{50}{3}x - 50 \\ x_{1/2} &= \frac{25}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 + 50} \\ x_1 &\approx 19.262 \quad \vee \quad x_2 \approx -2.596 \end{aligned}$$

Im betrachteten Sachzusammenhang ist nur $x_1 \approx 19.262$ relevant.

hinr. Bed.: $h'(x) = 0 \quad \wedge \quad h''(x) \neq 0$

$$h''(19.262) = -0.03 \cdot 19.262 + 0.25 \approx -0.328 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $h(x) = y$

$$h(19.262) \approx 25.091 \qquad \Rightarrow \text{HP}(19.26 \mid 25.09)$$

Die maximale Flughöhe beträgt also etwa 25.09 m. Wegen $25.09\,\text{m} > 25\,\text{m}$ wird die vorgeschriebene maximale Flughöhe von 25 m knapp **nicht** eingehalten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Ab einer Flughöhe von mehr als 15 m soll automatisch eine Videoaufnahme gestartet werden. Bestimmen Sie rechnerisch, in welchen Entfernungsabschnitten gefilmt wird.

Gesucht ist $h(x) > 15$. Zunächst werden die Randstellen mit $h(x) = 15$ bestimmt.

$$\begin{aligned} h(x) &= 15 \\ 15 &= -0.005x^3 + 0.125x^2 + 0.75x && | -15 \\ 0 &= -0.005x^3 + 0.125x^2 + 0.75x - 15 && | :(-0.005) \\ &= x^3 - 25x^2 - 150x + 3000 && | \, x_1 = 10 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

	1	− 25	− 150	3000
10		10	− 150	− 3000
	1	− 15	− 300	0

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 15x - 300 \\ x_{2/3} &= 7.5 \pm \sqrt{7.5^2 + 300} \\ x_2 &\approx 26.375 \quad \vee \quad x_3 \approx -11.375 \end{aligned}$$

Im Sachzusammenhang relevant sind die Werte $x_1 = 10$ und $x_2 \approx 26.375$. Testwert dazwischen:

$$h(20) = -0.005 \cdot 20^3 + 0.125 \cdot 20^2 + 0.75 \cdot 20 = 25 > 15$$

Zwischen $x = 10$ und $x \approx 26.375$ liegt die Flughöhe also über 15 m. Gefilmt wird im Entfernungsabschnitt von 10 m bis etwa 26.37 m.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Bestimmen Sie die Wendestelle(n) und erklären Sie, was diese beim Flugprofil bedeutet.

$$\begin{aligned} h'(x) &= -0.015x^2 + 0.25x + 0.75 \\ h''(x) &= -0.03x + 0.25 \\ h'''(x) &= -0.03 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $h''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.03x + 0.25 && \mid -0.25 \\ -0.03x &= -0.25 && \mid :(-0.03) \\ x &= \frac{25}{3} \approx 8.333 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h''(x) = 0 \quad \wedge \quad h'''(x) \neq 0$

$$h'''\left(\frac{25}{3}\right) = -0.03 \neq 0 \qquad \checkmark$$

Steigung an der Wendestelle:

$$h'\left(\frac{25}{3}\right) = -0.015 \cdot \left(\frac{25}{3}\right)^2 + 0.25 \cdot \frac{25}{3} + 0.75 \approx 1.792$$

Wegen $h''' < 0$ ist die Steigung h' an der Wendestelle $x \approx 8.33$ maximal. Die Wendestelle beschreibt daher die Stelle des steilsten Anstiegs der Drohne. Dort gewinnt sie am schnellsten an Höhe.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**