DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe f9FbSA

Eine Werkstatt bedruckt T-Shirts im Siebdruck. Für einen Auftrag soll ein sehr simples Motiv gedruckt werden, dessen Form zur Kalkulation vereinfacht modelliert wird. Die bedruckte Motivfläche wird als Fläche zwischen dem Graphen von

$$f(x) = -\frac{1}{50}x^3 + \frac{9}{50}x^2 + \frac{8}{25}x - \frac{72}{25}$$

und der x-Achse beschrieben. Dabei entspricht eine Längeneinheit 1 cm; x gibt die Breite in cm an und $f(x)$ die Höhe des Motivrandes in cm.

a) Damit das Motiv vollständig gedruckt wird, muss der Druckbereich in x-Richtung festgelegt werden. Bestimmen Sie die beiden Randpunkte des Motivs als kleinste und größte Stelle, an der $f(x) = 0$ gilt, und geben Sie daraus die Motivbreite an.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{50}x^3 + \frac{9}{50}x^2 + \frac{8}{25}x - \frac{72}{25} && \mid \cdot 50 \\ &= -x^3 + 9x^2 + 16x - 144 && \mid x_1 = 4 \end{aligned}$$

	-1	9	16	-144
4		-4	20	144
	-1	5	36	0

$$\begin{aligned} \Rightarrow q(x) &= -x^2 + 5x + 36 \\ 0 &= -x^2 + 5x + 36 && \mid :(-1) \\ &= x^2 - 5x - 36 \\ x_{2/3} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 + 36} \\ x_2 &= 9 \quad \vee \quad x_3 = -4 \end{aligned}$$

Die Randpunkte des Motivs liegen bei $x = -4$ und $x = 9$.

$$b = 9 - (-4) = 13$$

Die Motivbreite beträgt 13 cm.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Die benötigte Farbmenge hängt direkt von der bedruckten Fläche ab. Bestimmen Sie den geometrischen Flächeninhalt der bedruckten Motivfläche in cm^2.

Da der Graph die x-Achse bei $x = 4$ schneidet, entstehen zwei Teilflächen.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-4}^{4} \left(-\frac{1}{50}x^3 + \frac{9}{50}x^2 + \frac{8}{25}x - \frac{72}{25}\right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{200}x^4 + \frac{3}{50}x^3 + \frac{4}{25}x^2 - \frac{72}{25}x\right]_{-4}^{4} \\
&= -\frac{1}{200} \cdot 4^4 + \frac{3}{50} \cdot 4^3 + \frac{4}{25} \cdot 4^2 - \frac{72}{25} \cdot 4 \\
&\quad - \left(-\frac{1}{200} \cdot (-4)^4 + \frac{3}{50} \cdot (-4)^3 + \frac{4}{25} \cdot (-4)^2 - \frac{72}{25} \cdot (-4)\right) \\
&= -\frac{32}{5} - \frac{224}{25} \\
&= -\frac{384}{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{4}^{9} \left(-\frac{1}{50}x^3 + \frac{9}{50}x^2 + \frac{8}{25}x - \frac{72}{25}\right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{200}x^4 + \frac{3}{50}x^3 + \frac{4}{25}x^2 - \frac{72}{25}x\right]_{4}^{9} \\
&= -\frac{1}{200} \cdot 9^4 + \frac{3}{50} \cdot 9^3 + \frac{4}{25} \cdot 9^2 - \frac{72}{25} \cdot 9 \\
&\quad - \left(-\frac{1}{200} \cdot 4^4 + \frac{3}{50} \cdot 4^3 + \frac{4}{25} \cdot 4^2 - \frac{72}{25} \cdot 4\right) \\
&= -\frac{81}{40} - \left(-\frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{35}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= |A_1| + |A_2| \\
&= \left|-\frac{384}{25}\right| + \left|\frac{35}{8}\right| \\
&= \frac{384}{25} + \frac{35}{8} \\
&= \frac{3947}{200} = 19.735
\end{aligned}$$

Der geometrische Flächeninhalt der bedruckten Motivfläche beträgt $19.735\,\text{cm}^2$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Beim Siebdruck werden im Mittel 0.012 g Farbe pro cm^2 aufgetragen. Die Farbe kostet 24 Euro pro kg. Berechnen Sie die Farbmasse und die Farbkosten pro T-Shirt (in Cent).

$$\begin{aligned} m &= 19.735 \cdot 0.012 \\ &= 0.23682\,\text{g} \\ &= 0.00023682\,\text{kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= 0.00023682 \cdot 24 \\ &= 0.00568368\,\text{Euro} \\ &= 0.568368\,\text{Cent} \end{aligned}$$

Pro T-Shirt werden 0.23682 g Farbe benötigt. Die Farbkosten pro T-Shirt betragen ungefähr 0.57 Cent.

d) Für einen Auftrag sollen 2000 T-Shirts bedruckt werden. Bestimmen Sie die insgesamt benötigte Farbmasse und die Gesamtkosten. Beurteilen Sie, ob eine vorhandene Farbdose mit 0.5 kg ausreicht oder ob nachbestellt werden muss.

$$\begin{aligned} m_{\text{ges}} &= 2000 \cdot 0.23682 \\ &= 473.64\,\text{g} \\ &= 0.47364\,\text{kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\text{ges}} &= 2000 \cdot 0.00568368 \\ &= 11.36736\,\text{Euro} \end{aligned}$$

Insgesamt werden 0.47364 kg Farbe benötigt. Die Gesamtkosten betragen ungefähr 11.37 Euro.

Da $0.47364\,\text{kg} < 0.5\,\text{kg}$ gilt, reicht die vorhandene Farbdose aus. Es bleiben noch

$$0.5 - 0.47364 = 0.02636\,\text{kg} = 26.36\,\text{g}$$

übrig. Es muss also nicht nachbestellt werden.

e) Begründen Sie kurz, warum hier nicht einfach das Integral über das gesamte Intervall als Ergebnis ausreicht, sondern der geometrische Flächeninhalt benötigt wird.

Hier ist nicht der orientierte Flächeninhalt gesucht, sondern die tatsächlich bedruckte Fläche des Motivs.

Da der Graph die x-Achse bei $x = 4$ schneidet, liegt ein Teil der Fläche oberhalb und ein Teil unterhalb der x-Achse. Bei einem gewöhnlichen Integral würden sich diese Anteile teilweise gegenseitig aufheben.

Für die Farbmenge ist aber die gesamte tatsächlich bedruckte Fläche entscheidend. Deshalb muss hier der geometrische Flächeninhalt, also die Summe der Beträge aller Teilflächen, betrachtet werden.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**