DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe euadwE

Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittstellen der beiden Parabeln, ihre Scheitelpunkte und jeweils die Nullstellen der Funktionen.

a) $f_1(x) = -x^2 + 6x - 8, \quad f_2(x) = 2x^2 - 4x + 1$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ -x^2 + 6x - 8 &= 2x^2 - 4x + 1 && | +x^2 - 6x + 8 \\ 0 &= 3x^2 - 10x + 9 && | :3 \\ 0 &= x^2 - \frac{10}{3}x + 3 \\ x_{1/2} &= \frac{5}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 3} \\ &= \frac{5}{3} \pm \sqrt{-\frac{2}{9}} \end{aligned}$$

Der Term unter der Wurzel ist negativ. $\Rightarrow$ keine Schnittpunkte

Scheitelpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -x^2 + 6x - 8 \\ &= -(x^2 - 6x) - 8 \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) - 8 \\ &= -\Big((x-3)^2 - 9\Big) - 8 \\ &= -(x-3)^2 + 9 - 8 \\ &= -(x-3)^2 + 1 \\ &\Rightarrow S_1(3 \mid 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 2x^2 - 4x + 1 \\ &= 2(x^2 - 2x) + 1 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 1 \\ &= 2\Big((x-1)^2 - 1\Big) + 1 \\ &= 2(x-1)^2 - 2 + 1 \\ &= 2(x-1)^2 - 1 \\ &\Rightarrow S_2(1 \mid -1) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= 0 \\
0 &= -x^2 + 6x - 8 && \mid :(-1) \\
0 &= x^2 - 6x + 8 \\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\
x_1 &= 4 \quad \vee \quad x_2 = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= 0 \\
0 &= 2x^2 - 4x + 1 && \mid :2 \\
0 &= x^2 - 2x + 0.5 \\
x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - 0.5} \\
x_1 &\approx 1.707 \quad \vee \quad x_2 \approx 0.293
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f_1(x) = 0.5x^2 - 2x, \quad f_2(x) = x^2 - 3x + 2$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ 0.5x^2 - 2x &= x^2 - 3x + 2 && | -0.5x^2 + 2x \\ 0 &= 0.5x^2 - x + 2 && | :0.5 \\ 0 &= x^2 - 2x + 4 \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - 4} \\ &= 1 \pm \sqrt{-3} \end{aligned}$$

Der Term unter der Wurzel ist negativ. $\Rightarrow$ keine Schnittpunkte

Scheitelpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0.5x^2 - 2x \\ &= 0.5(x^2 - 4x) \\ &= 0.5(x^2 - 4x + 4 - 4) \\ &= 0.5\left((x-2)^2 - 4\right) \\ &= 0.5(x-2)^2 - 2 \\ &\Rightarrow S_1(2 \mid -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x^2 - 3x + 2 \\ &= (x^2 - 3x + 2.25 - 2.25) + 2 \\ &= \left((x-1.5)^2 - 2.25\right) + 2 \\ &= (x-1.5)^2 - 2.25 + 2 \\ &= (x-1.5)^2 - 0.25 \\ &\Rightarrow S_2(1.5 \mid -0.25) \end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ 0 &= 0.5x^2 - 2x && | :0.5 \\ 0 &= x^2 - 4x \\ &= x(x-4) && | \, x_1 = 0 \\ x - 4 &= 0 && | +4 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 \\ 0 &= x^2 - 3x + 2 \\ x_{1/2} &= 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 2} \\ x_1 &= 2 \quad \vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f_1(x) = x^2 - 5x + 6, \quad f_2(x) = -2.5x^2 + 10x - 5$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ x^2 - 5x + 6 &= -2.5x^2 + 10x - 5 && | -x^2 + 5x - 6 \\ 0 &= -3.5x^2 + 15x - 11 && | :(-3.5) \\ 0 &= x^2 - \frac{30}{7}x + \frac{22}{7} \\ x_{1/2} &= \frac{15}{7} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{7}\right)^2 - \frac{22}{7}} \\ x_1 &\approx 3.347 \quad \vee \quad x_2 \approx 0.939 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(3.347) &= 3.347^2 - 5 \cdot 3.347 + 6 \approx 0.47 && \Rightarrow P_1(3.35 \mid 0.47) \\ f_1(0.939) &= 0.939^2 - 5 \cdot 0.939 + 6 \approx 2.19 && \Rightarrow P_2(0.94 \mid 2.19) \end{aligned}$$

Die Parabeln schneiden sich in zwei Punkten.

Scheitelpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - 5x + 6 \\ &= (x^2 - 5x + 6.25 - 6.25) + 6 \\ &= \Big((x - 2.5)^2 - 6.25\Big) + 6 \\ &= (x - 2.5)^2 - 6.25 + 6 \\ &= (x - 2.5)^2 - 0.25 \\ &\Rightarrow S_1(2.5 \mid -0.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -2.5x^2 + 10x - 5 \\ &= -2.5(x^2 - 4x) - 5 \\ &= -2.5(x^2 - 4x + 4 - 4) - 5 \\ &= -2.5\Big((x - 2)^2 - 4\Big) - 5 \\ &= -2.5(x - 2)^2 + 10 - 5 \\ &= -2.5(x - 2)^2 + 5 \\ &\Rightarrow S_2(2 \mid 5) \end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ 0 &= x^2 - 5x + 6 \\ x_{1/2} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 6} \\ x_1 &= 3 \quad \vee \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 \\ 0 &= -2.5x^2 + 10x - 5 && | :(-2.5) \\ 0 &= x^2 - 4x + 2 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 2} \\ x_1 &\approx 3.414 \quad \vee \quad x_2 \approx 0.586 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f_1(x) = 2x^2 + x + 3, \quad f_2(x) = -x^2 + 4x - 1$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ 2x^2 + x + 3 &= -x^2 + 4x - 1 \qquad | -2x^2 - x - 3 \\ 0 &= -3x^2 + 3x - 4 \qquad | :(-3) \\ 0 &= x^2 - x + \frac{4}{3} \\ x_{1/2} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - \frac{4}{3}} \\ &= 0.5 \pm \sqrt{-\frac{13}{12}} \end{aligned}$$

Der Term unter der Wurzel ist negativ. $\Rightarrow$ keine Schnittpunkte

Scheitelpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x^2 + x + 3 \\ &= 2(x^2 + 0.5x) + 3 \\ &= 2\left(x^2 + 0.5x + 0.25^2 - 0.25^2\right) + 3 \\ &= 2\left((x + 0.25)^2 - 0.0625\right) + 3 \\ &= 2(x + 0.25)^2 - 0.125 + 3 \\ &= 2(x + 0.25)^2 + 2.875 \\ &\Rightarrow S_1(-0.25 \mid 2.875) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -x^2 + 4x - 1 \\ &= -(x^2 - 4x) - 1 \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 1 \\ &= -\left((x - 2)^2 - 4\right) - 1 \\ &= -(x - 2)^2 + 4 - 1 \\ &= -(x - 2)^2 + 3 \\ &\Rightarrow S_2(2 \mid 3) \end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ 0 &= 2x^2 + x + 3 \qquad | :2 \\ 0 &= x^2 + 0.5x + 1.5 \\ x_{1/2} &= -0.25 \pm \sqrt{0.25^2 - 1.5} \\ &= -0.25 \pm \sqrt{-1.4375} \end{aligned}$$

Der Term unter der Wurzel ist negativ. $\Rightarrow f_1$ hat keine Nullstellen.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 \\ 0 &= -x^2 + 4x - 1 \qquad | :(-1) \\ 0 &= x^2 - 4x + 1 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 1} \\ x_1 &\approx 3.732 \quad \vee \quad x_2 \approx 0.268 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = (x+2)^2$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ x^2 &= (x+2)^2 \\ x^2 &= x^2 + 4x + 4 && | -x^2 - 4x \\ -4x &= 4 && | :(-4) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$f_1(-1) = (-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow P(-1 \mid 1)$$

Die Parabeln schneiden sich in genau einem Punkt.

Scheitelpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 && \Rightarrow S_1(0 \mid 0) \\ f_2(x) &= (x+2)^2 && \Rightarrow S_2(-2 \mid 0) \end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ x^2 &= 0 && | \sqrt{} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 \\ (x+2)^2 &= 0 && | \sqrt{} \\ x + 2 &= 0 && | -2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

f) $f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^2 - 4$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ x^2 &= x^2 - 4 && | -x^2 \\ 0 &= -4 \end{aligned}$$

Widerspruch $\Rightarrow$ keine Schnittpunkte

Scheitelpunkte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 && \Rightarrow S_1(0 \mid 0) \\ f_2(x) &= x^2 - 4 && \Rightarrow S_2(0 \mid -4) \end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ x^2 &= 0 && | \sqrt{} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 && | +4 \\ x^2 &= 4 && | \sqrt{} \\ x_1 = 2 \quad &\vee \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**