DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe eHSbDb

Als Einstieg in die Steckbriefaufgaben folgen zunächst ein paar Übungen zum Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme. Bestimmt werden soll eine quadratische Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, deren Graph durch die drei angegebenen Punkte verläuft. Aus den Punktbedingungen ist ein lineares Gleichungssystem für a, b und c aufzustellen und zu lösen. Anschließend ist die zugehörige Funktionsgleichung anzugeben.

a) $A(-2 \mid 7)$, $B(2 \mid -1)$, $C(4 \mid 1)$

$$
\begin{array}{rcll}
f(-2) = 7 & \Rightarrow & 7 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & = 4a - 2b + c \\
f(2) = -1 & \Rightarrow & -1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = 4a + 2b + c \\
f(4) = 1 & \Rightarrow & 1 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c & = 16a + 4b + c
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
4 & -2 & 1 & 7 \\
4 & 2 & 1 & -1 \\
16 & 4 & 1 & 1
\end{array}\right)
\quad \begin{array}{l} \\ \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 4 \cdot \text{I} \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
4 & -2 & 1 & 7 \\
0 & 4 & 0 & -8 \\
0 & 12 & -3 & -27
\end{array}\right)
\quad \text{III} - 3 \cdot \text{II}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
4 & -2 & 1 & 7 \\
0 & 4 & 0 & -8 \\
0 & 0 & -3 & -3
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{rll}
\text{III} & -3c = -3 & \mid :(-3) \\
& c = 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
\text{II} & 4b = -8 & \mid :4 \\
& b = -2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
\text{I} & 4a - 2 \cdot (-2) + 1 = 7 & \mid -5 \\
& 4a = 2 & \mid :4 \\
& a = 0.5 & \\
& \Rightarrow f(x) = 0.5x^2 - 2x + 1 &
\end{array}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $A(-2 \mid -7)$, $B(1 \mid 2)$, $C(3 \mid 2)$

$$
\begin{array}{rcll}
f(-2) = -7 & \Rightarrow & -7 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & = 4a - 2b + c \\
f(1) = 2 & \Rightarrow & 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = a + b + c \\
f(3) = 2 & \Rightarrow & 2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & = 9a + 3b + c
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 4 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 4 \cdot \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 6 & 3 & 15 \\ 0 & 30 & -5 & 71 \end{array}\right) \quad \text{III} - 5 \cdot \text{II}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 6 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -20 & -4 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{III} & -20c = -4 & \mid :(-20) \\
& c = 0.2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{II} & 6b + 3 \cdot 0.2 = 15 & \mid -0.6 \\
& 6b = 14.4 & \mid :6 \\
& b = 2.4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{I} & 4a - 2 \cdot 2.4 + 0.2 = -7 & \mid +4.6 \\
& 4a = -2.4 & \mid :4 \\
& a = -0.6 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow f(x) = -0.6x^2 + 2.4x + 0.2$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $A(-4 \mid 28)$, $B(0 \mid 4)$, $C(2 \mid 0)$

$$\begin{aligned} f(-4) = 28 \quad &\Rightarrow \quad 28 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c \quad &= 16a - 4b + c \\ f(0) = 4 \quad &\Rightarrow \quad 4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad &= c \\ f(2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \quad &= 4a + 2b + c \end{aligned}$$

Aus der zweiten Bedingung folgt direkt $c = 4$. Eingesetzt in die übrigen Bedingungen:

$$\begin{aligned} 16a - 4b + 4 &= 28 \quad | -4 \\ 16a - 4b &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4a + 2b + 4 &= 0 \quad | -4 \\ 4a + 2b &= -4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 16 & -4 & 24 \\ 4 & 2 & -4 \end{array}\right) \quad 4 \cdot \text{II} - \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 16 & -4 & 24 \\ 0 & 12 & -40 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad 12b &= -40 \quad | :12 \\ b &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 16a - 4 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) &= 24 \quad | -\frac{40}{3} \\ 16a &= \frac{32}{3} \quad | :16 \\ a &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 4$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $A(-1 \mid 2.5)$, $B(1 \mid -7.5)$, $C(3 \mid -5.5)$

$$
\begin{aligned}
f(-1) = 2.5 \quad &\Rightarrow \quad 2.5 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \quad &&= a - b + c \\
f(1) = -7.5 \quad &\Rightarrow \quad -7.5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \quad &&= a + b + c \\
f(3) = -5.5 \quad &\Rightarrow \quad -5.5 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \quad &&= 9a + 3b + c
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2.5 \\ 1 & 1 & 1 & -7.5 \\ 9 & 3 & 1 & -5.5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2.5 \\ 0 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 12 & -8 & -28 \end{array}\right) \quad \text{III} - 6 \cdot \text{II}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2.5 \\ 0 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -8 & 32 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{III} \quad & -8c = 32 && \mid :(-8) \\
& c = -4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{II} \quad & 2b = -10 && \mid :2 \\
& b = -5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{I} \quad & a - (-5) - 4 = 2.5 && \mid \text{zusammenfassen} \\
& a + 1 = 2.5 && \mid -1 \\
& a = 1.5
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f(x) = 1.5x^2 - 5x - 4$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $A(-2 \mid -14)$, $B(1 \mid -2)$, $C(3 \mid -14)$

$$
\begin{aligned}
f(-2) = -14 \quad &\Rightarrow \quad -14 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \quad &&= 4a - 2b + c \\
f(1) = -2 \quad &\Rightarrow \quad -2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \quad &&= a + b + c \\
f(3) = -14 \quad &\Rightarrow \quad -14 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \quad &&= 9a + 3b + c
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -14 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & -14 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 4 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 4 \cdot \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 30 & -5 & 70 \end{array}\right) \qquad \text{III} - 5 \cdot \text{II}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -20 & 40 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{III} \quad & -20c = 40 && \mid :(-20) \\
& c = -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{II} \quad & 6b + 3 \cdot (-2) = 6 && \mid +6 \\
& 6b = 12 && \mid :6 \\
& b = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{I} \quad & 4a - 2 \cdot 2 - 2 = -14 && \mid +6 \\
& 4a = -8 && \mid :4 \\
& a = -2 \\
& \Rightarrow f(x) = -2x^2 + 2x - 2
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $A(-6 \mid 8)$, $B(-2 \mid 2)$, $C(4 \mid 8)$

$$
\begin{aligned}
f(-6) = 8 \quad &\Rightarrow \quad 8 = a \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + c \quad &&= 36a - 6b + c \\
f(-2) = 2 \quad &\Rightarrow \quad 2 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \quad &&= 4a - 2b + c \\
f(4) = 8 \quad &\Rightarrow \quad 8 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \quad &&= 16a + 4b + c
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 36 & -6 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 16 & 4 & 1 & 8 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 9 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 9 \cdot \text{III} - 4 \cdot \text{I} \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 36 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & -12 & 8 & 10 \\ 0 & 60 & 5 & 40 \end{array}\right) \qquad \text{III} + 5 \cdot \text{II}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 36 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & -12 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 45 & 90 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{III} \quad & 45c = 90 && \mid :45 \\
& c = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{II} \quad & -12b + 8 \cdot 2 = 10 && \mid -16 \\
& -12b = -6 && \mid :(-12) \\
& b = 0.5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{I} \quad & 36a - 6 \cdot 0.5 + 2 = 8 && \mid +1 \\
& 36a = 9 && \mid :36 \\
& a = 0.25
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f(x) = 0.25x^2 + 0.5x + 2$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**