DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe e9VQLy

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion kleinstmöglichen Grades, deren Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist und im Punkt $S(1 \mid 1)$ einen Sattelpunkt besitzt.
Da der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist, kommen nur ungerade Exponenten vor.
Für einen Sattelpunkt in $S(1 \mid 1)$ müssen $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ und $f''(1) = 0$ gelten.

Ausschluss von Grad 3

$$f(x) = ax^3 + bx$$
$$f'(x) = 3ax^2 + b$$
$$f''(x) = 6ax$$
$$f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 6a \cdot 1 \quad = 6a$$
$$6a = 0 \quad | :6$$
$$a = 0$$

Damit fällt der Term ax^3 weg und es bleibt nur $f(x) = bx$, also keine Funktion 3. Grades. Eine punktsymmetrische Funktion 3. Grades mit Sattelpunkt bei $x = 1$ gibt es also nicht. Der nächsthöhere ungerade Grad ist 5.

Funktion 5. Grades

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$
$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$
$$f'''(x) = 60ax^2 + 6b$$
$$\begin{aligned} f(1) = 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 = a \cdot 1^5 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1 \quad &= a + b + c \\ f'(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 5a \cdot 1^4 + 3b \cdot 1^2 + c \quad &= 5a + 3b + c \\ f''(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 20a \cdot 1^3 + 6b \cdot 1 \quad &= 20a + 6b \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 20 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - 5 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 20 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -14 & -20 & -20 \end{array}\right) \quad \text{III} - 7 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 15 \end{array}\right)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

$$\begin{aligned}
\text{III}\quad & 8c = 15 && \mid :8\\
& c = \frac{15}{8} = 1.875
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II}\quad & -2b - 4 \cdot 1.875 = -5 && \mid +7.5\\
& -2b = 2.5 && \mid :(-2)\\
& b = -1.25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I}\quad & a - 1.25 + 1.875 = 1\\
& a + 0.625 = 1 && \mid -0.625\\
& a = 0.375
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0.375x^5 - 1.25x^3 + 1.875x$$

Probe auf Sattelpunkt ($f''' \neq 0$):

$$f'''(1) = 60 \cdot 0.375 \cdot 1^2 + 6 \cdot (-1.25) = 15 \neq 0 \qquad \checkmark$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**