DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe e7AhV9

Gegeben sind die folgenden Punkte einer quadratischen Funktion. Bestimmen Sie zu jeder Teilaufgabe sowohl die Normalform als auch die Scheitelpunktform.

a) $A(4 \mid 11.4)$, $B(3 \mid 8)$, $C(-2 \mid 9)$

$$\begin{aligned}
11.4 &= a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c && = 16a + 4b + c \\
8 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c && = 9a + 3b + c \\
9 &= a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c && = 4a - 2b + c
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 11.4 \\ 9 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 1 & 9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 16 \cdot \text{II} - 9 \cdot \text{I} \\ 4 \cdot \text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 11.4 \\ 0 & 12 & 7 & 25.4 \\ 0 & -12 & 3 & 24.6 \end{array}\right) \quad \text{III} + \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 11.4 \\ 0 & 12 & 7 & 25.4 \\ 0 & 0 & 10 & 50 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{III} \quad & 10c = 50 && \mid :10 \\
& c = 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} \quad & 12b + 7 \cdot 5 = 25.4 && \mid -35 \\
& 12b = -9.6 && \mid :12 \\
& b = -0.8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad & 16a + 4 \cdot (-0.8) + 5 = 11.4 && \mid -1.8 \\
& 16a = 9.6 && \mid :16 \\
& a = 0.6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= 0.6x^2 - 0.8x + 5 && \text{Normalform} \\
&= 0.6\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 5 \\
&= 0.6\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + 5 \\
&= 0.6\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right) + 5 \\
&= 0.6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{15} + 5 \\
&= 0.6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{71}{15} && \text{Scheitelpunktform} \\
&\Rightarrow S\left(\frac{2}{3} \;\middle|\; \frac{71}{15}\right)
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $A(2 \mid -6)$, $B(1 \mid -3)$, $C(-1 \mid -9)$

$$\begin{aligned}
-6 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & &= 4a + 2b + c \\
-3 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & &= a + b + c \\
-9 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & &= a - b + c
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 4 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 4 \cdot \text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -6 & 3 & -30 \end{array}\right) \quad \text{III} + 3 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 12 & -48 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{III} \quad & 12c = -48 && \mid :12 \\
& c = -4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} \quad & 2b + 3 \cdot (-4) = -6 && \mid +12 \\
& 2b = 6 && \mid :2 \\
& b = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad & 4a + 2 \cdot 3 - 4 = -6 && \mid -2 \\
& 4a = -8 && \mid :4 \\
& a = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= -2x^2 + 3x - 4 && \text{Normalform} \\
&= -2(x^2 - 1.5x) - 4 \\
&= -2(x^2 - 1.5x + 0.5625 - 0.5625) - 4 \\
&= -2\left((x - 0.75)^2 - 0.5625\right) - 4 \\
&= -2(x - 0.75)^2 + 1.125 - 4 \\
&= -2(x - 0.75)^2 - 2.875 && \text{Scheitelpunktform} \\
&\Rightarrow S(0.75 \mid -2.875)
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $A(-6 \mid 1)$, $B(2 \mid 9)$, $C(-2 \mid -3)$

$$
\begin{aligned}
1 &= a \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + c && = 36a - 6b + c \\
9 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c && = 4a + 2b + c \\
-3 &= a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c && = 4a - 2b + c
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 36 & -6 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 9 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 9 \cdot \text{III} - \text{I} \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 36 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 24 & 8 & 80 \\ 0 & -12 & 8 & -28 \end{array}\right) \quad 2 \cdot \text{III} + \text{II}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 36 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 24 & 8 & 80 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{III} \quad & 24c = 24 && \mid :24 \\
& c = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{II} \quad & 24b + 8 \cdot 1 = 80 && \mid -8 \\
& 24b = 72 && \mid :24 \\
& b = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{I} \quad & 36a - 6 \cdot 3 + 1 = 1 && \mid +17 \\
& 36a = 18 && \mid :36 \\
& a = 0.5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= 0.5x^2 + 3x + 1 && \text{Normalform} \\
&= 0.5(x^2 + 6x) + 1 \\
&= 0.5(x^2 + 6x + 9 - 9) + 1 \\
&= 0.5\left((x+3)^2 - 9\right) + 1 \\
&= 0.5(x+3)^2 - 4.5 + 1 \\
&= 0.5(x+3)^2 - 3.5 && \text{Scheitelpunktform} \\
&\Rightarrow S(-3 \mid -3.5)
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $A(0.5 \mid 3.5)$, $B(1 \mid -5)$, $C(-1 \mid -7)$

$$
\begin{aligned}
3.5 &= a \cdot 0.5^2 + b \cdot 0.5 + c && = 0.25a + 0.5b + c \\
-5 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c && = a + b + c \\
-7 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c && = a - b + c
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0.25 & 0.5 & 1 & 3.5 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 4 \cdot \text{I} \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0.25 & 0.5 & 1 & 3.5 \\ 0 & -1 & -3 & -19 \\ 0 & -3 & -3 & -21 \end{array}\right) \quad \text{III} - 3 \cdot \text{II}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0.25 & 0.5 & 1 & 3.5 \\ 0 & -1 & -3 & -19 \\ 0 & 0 & 6 & 36 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{III} \quad & 6c = 36 && \mid :6 \\
& c = 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{II} \quad & -b - 3 \cdot 6 = -19 && \mid +18 \\
& -b = -1 && \mid \cdot(-1) \\
& b = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{I} \quad & 0.25a + 0.5 \cdot 1 + 6 = 3.5 && \mid -6.5 \\
& 0.25a = -3 && \mid :0.25 \\
& a = -12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= -12x^2 + x + 6 && \text{Normalform} \\
&= -12\left(x^2 - \frac{1}{12}x\right) + 6 \\
&= -12\left(x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{576} - \frac{1}{576}\right) + 6 \\
&= -12\left(\left(x - \frac{1}{24}\right)^2 - \frac{1}{576}\right) + 6 \\
&= -12\left(x - \frac{1}{24}\right)^2 + \frac{1}{48} + 6 \\
&= -12\left(x - \frac{1}{24}\right)^2 + \frac{289}{48} && \text{Scheitelpunktform} \\
&\Rightarrow S\left(\frac{1}{24} \mid \frac{289}{48}\right)
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $A(5 \mid 8.5)$, $B(2 \mid 4.5)$, $C(-3 \mid -3.5)$

$$\begin{aligned}
8.5 &= a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c & &= 25a + 5b + c \\
4.5 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & &= 4a + 2b + c \\
-3.5 &= a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c & &= 9a - 3b + c
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 8.5 \\ 4 & 2 & 1 & 4.5 \\ 9 & -3 & 1 & -3.5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 25 \cdot \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ 25 \cdot \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 8.5 \\ 0 & 30 & 21 & 78.5 \\ 0 & -120 & 16 & -164 \end{array}\right) \quad \text{III} + 4 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 8.5 \\ 0 & 30 & 21 & 78.5 \\ 0 & 0 & 100 & 150 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{III} \quad & 100c = 150 && \mid :100 \\
& c = 1.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} \quad & 30b + 21 \cdot 1.5 = 78.5 && \mid -31.5 \\
& 30b = 47 && \mid :30 \\
& b = \frac{47}{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad & 25a + 5 \cdot \frac{47}{30} + 1.5 = 8.5 && \mid -\frac{28}{3} \\
& 25a = -\frac{5}{6} && \mid :25 \\
& a = -\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= -\frac{1}{30}x^2 + \frac{47}{30}x + 1.5 && \text{Normalform} \\
&= -\frac{1}{30}(x^2 - 47x) + 1.5 \\
&= -\frac{1}{30}(x^2 - 47x + 552.25 - 552.25) + 1.5 \\
&= -\frac{1}{30}\left((x - 23.5)^2 - 552.25\right) + 1.5 \\
&\approx -\frac{1}{30}(x - 23.5)^2 + 18.408 + 1.5 \\
&\approx -\frac{1}{30}(x - 23.5)^2 + 19.908 && \text{Scheitelpunktform} \\
&\Rightarrow S(23.5 \mid 19.91)
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $A(1 \mid -0.5)$, $B(-2 \mid 7.5)$, $C(3 \mid 4)$

$$
\begin{aligned}
-0.5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \quad &= a + b + c \\
7.5 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \quad &= 4a - 2b + c \\
4 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \quad &= 9a + 3b + c
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -0.5 \\ 4 & -2 & 1 & 7.5 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -0.5 \\ 0 & -6 & -3 & 9.5 \\ 0 & -6 & -8 & 8.5 \end{array}\right) \quad \text{III} - \text{II}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -0.5 \\ 0 & -6 & -3 & 9.5 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{III} \quad -5c &= -1 && \mid :(-5) \\
c &= 0.2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{II} \quad -6b - 3 \cdot 0.2 &= 9.5 && \mid +0.6 \\
-6b &= 10.1 && \mid :(-6) \\
b &= -\frac{101}{60}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{I} \quad a - \frac{101}{60} + 0.2 &= -0.5 && \mid +\frac{89}{60} \\
a &= \frac{59}{60}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= \frac{59}{60}x^2 - \frac{101}{60}x + 0.2 && \text{Normalform} \\
&= \frac{59}{60}\left(x^2 - \frac{101}{59}x\right) + 0.2 \\
&= \frac{59}{60}\left(x^2 - \frac{101}{59}x + \left(\frac{101}{118}\right)^2 - \left(\frac{101}{118}\right)^2\right) + 0.2 \\
&= \frac{59}{60}\left(\left(x - \frac{101}{118}\right)^2 - \left(\frac{101}{118}\right)^2\right) + 0.2 \\
&\approx \frac{59}{60}\left(x - \frac{101}{118}\right)^2 - 0.72 + 0.2 \\
&\approx \frac{59}{60}\left(x - \frac{101}{118}\right)^2 - 0.52 && \text{Scheitelpunktform} \\
&\Rightarrow S(0.86 \mid -0.52)
\end{aligned}
$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**