DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe dWvtSM

Bestimmen Sie zu jeder Funktion die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 6x - 4 \\ g''(x) &= 6x - 6 \\ g'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ 0 &= x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \quad | \, x_1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -4 & 12 \\ 2 & & 2 & -2 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - x - 6 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 6} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Extrempunkt

notw. Bed.: $g'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 6x - 4 && | \, :3 \\ &= x^2 - 2x - \frac{4}{3} \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + \frac{4}{3}} \\ x_1 &\approx 2.528 \quad \vee \quad x_2 \approx -0.528 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g'(x) = 0 \quad \wedge \quad g''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} g''(2.528) &= 6 \cdot 2.528 - 6 = 9.168 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ g''(-0.528) &= 6 \cdot (-0.528) - 6 = -9.168 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $g(x) = y$

$$\begin{aligned} g(2.528) &\approx -1.128 && \Rightarrow \text{TP}(2.53 \mid -1.13) \\ g(-0.528) &\approx 13.128 && \Rightarrow \text{HP}(-0.53 \mid 13.13) \end{aligned}$$

Wendepunkt

notw. Bed.: $g''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 6 \quad | \, +6 \\ 6x &= 6 \quad | \, :6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g''(x) = 0 \quad \wedge \quad g'''(x) \neq 0$

$$g'''(1) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

y-Wert: $g(x) = y$

$$g(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 12 = 6 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1 \mid 6)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3x^2 + 12x - 9 \\ g''(x) &= -6x + 12 \\ g'''(x) &= -6 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$g(x) = 0$$

$$0 = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2 \quad | \, x_1 = 2$$

	-1	6	-9	2
2		-2	8	-2
	-1	4	-1	0

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 4x - 1 && | \cdot(-1) \\ &= x^2 - 4x + 1 \\ x_{2/3} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 1} \\ x_2 &= 2 + \sqrt{3} \approx 3.732 \quad \vee \quad x_3 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 \end{aligned}$$

Extrempunkt

notw. Bed.: $g'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -3x^2 + 12x - 9 \quad | :(-3) \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_1 &= 3 \quad \vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g'(x) = 0 \quad \wedge \quad g''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} g''(3) &= -6 \cdot 3 + 12 = -6 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ g''(1) &= -6 \cdot 1 + 12 = 6 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $g(x) = y$

$$\begin{aligned} g(3) &= -3^3 + 6 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 2 = 2 && \Rightarrow \text{HP}(3 \mid 2) \\ g(1) &= -1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 = -2 && \Rightarrow \text{TP}(1 \mid -2) \end{aligned}$$

Wendepunkt

notw. Bed.: $g''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -6x + 12 \quad | +6x \\ 6x &= 12 \quad | :6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g''(x) = 0 \quad \wedge \quad g'''(x) \neq 0$

$$g'''(2) = -6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $g(x) = y$

$$g(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \text{WP}_1(2 \mid 0)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $g(x) = 2x^3 - 8x^2 - 14x + 20$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x^2 - 16x - 14 \\ g''(x) &= 12x - 16 \\ g'''(x) &= 12 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$0 = 2x^3 - 8x^2 - 14x + 20 \quad | \; x_1 = 1$$

	2	-8	-14	20
1		2	-6	-20
	2	-6	-20	0

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 6x - 20 \qquad | :2 \\ &= x^2 - 3x - 10 \\ x_{2/3} &= 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 + 10} \\ x_2 &= 5 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Extrempunkt

notw. Bed.: $g'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x^2 - 16x - 14 \qquad | :6 \\ &= x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{7}{3} \\ x_{1/2} &= \frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}} \\ x_1 &\approx 3.361 \quad \vee \quad x_2 \approx -0.694 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g'(x) = 0 \quad \wedge \quad g''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} g''(3.361) &= 12 \cdot 3.361 - 16 = 24.332 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ g''(-0.694) &= 12 \cdot (-0.694) - 16 = -24.328 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $g(x) = y$

$$\begin{aligned} g(3.361) &\approx -41.491 \qquad \Rightarrow \text{TP}(3.36 \mid -41.49) \\ g(-0.694) &\approx 25.194 \qquad \Rightarrow \text{HP}(-0.69 \mid 25.19) \end{aligned}$$

Wendepunkt

notw. Bed.: $g''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x - 16 \quad | +16 \\ 12x &= 16 \qquad | :12 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g''(x) = 0 \quad \wedge \quad g'''(x) \neq 0$

$$g'''\left(\frac{4}{3}\right) = 12 \neq 0 \qquad \checkmark$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

y-Wert: $g(x) = y$

$$g\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{220}{27} \approx -8.148 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.33 \mid -8.15)$$

d) $g(x) = 0.5x^3 - 4.5x$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1.5x^2 - 4.5 \\ g''(x) &= 3x \\ g'''(x) &= 3 \end{aligned}$$

Nullstellen

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x^3 - 4.5x \\ &= x(0.5x^2 - 4.5) \qquad \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x^2 - 4.5 \qquad \mid +4.5 \\ 0.5x^2 &= 4.5 \qquad \mid :0.5 \\ x^2 &= 9 \qquad \mid \sqrt{} \\ x_2 &= 3 \quad \vee \quad x_3 = -3 \end{aligned}$$

Extrempunkt
notw. Bed.: $g'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 1.5x^2 - 4.5 \qquad \mid :1.5 \\ 0 &= x^2 - 3 \\ x_1 &= \sqrt{3} \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g'(x) = 0 \quad \wedge \quad g''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} g''(\sqrt{3}) &= 5.196 > 0 \qquad \Rightarrow \mathrm{TP} \\ g''(-\sqrt{3}) &= -5.196 < 0 \qquad \Rightarrow \mathrm{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $g(x) = y$

$$\begin{aligned} g(\sqrt{3}) &= -5.196 \qquad \Rightarrow \mathrm{TP}(1.73 \mid -5.2) \\ g(-\sqrt{3}) &= 5.196 \qquad \Rightarrow \mathrm{HP}(-1.73 \mid 5.2) \end{aligned}$$

Wendepunkt
notw. Bed.: $g''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x \quad \mid :3 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g''(x) = 0 \quad \wedge \quad g'''(x) \neq 0$

$$g'''(0) = 3 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $g(x) = y$

$$g(0) = 0 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0 \mid 0)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**