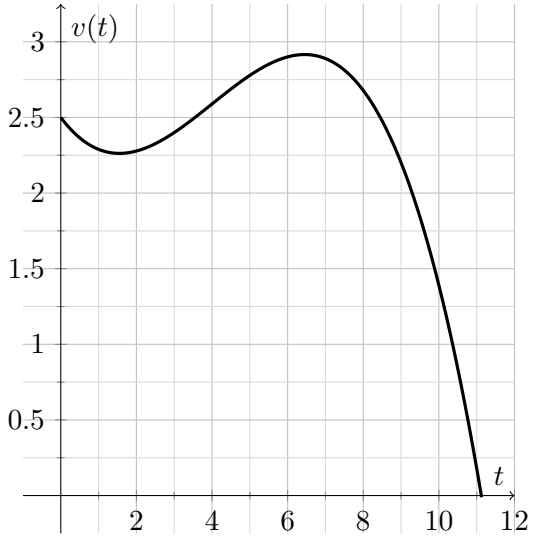
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe dHGLpg

Ein autonomer Shuttlebus reduziert vor einer Haltestelle seine Geschwindigkeit automatisch. Für den Komfort ist wichtig, wann die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt und ob der Bus innerhalb des Bereichs sicher zum Stillstand kommt. Die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) wird modellhaft beschrieben durch

$$v(t) = -\frac{1}{90}t^3 + \frac{2}{15}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{5}{2} \quad (0 \le t \le 11.1)$$

mit t in Sekunden.

a) Prüfen Sie zeichnerisch, ob der Shuttle im gesamten Zeitraum $[0; 11.1]$ vorwärts rollt oder ob das Modell zeitweise eine unplausible Rückwärtsfahrt liefert.



Der Graph liegt im gesamten Intervall $[0; 11.1]$ oberhalb der t-Achse. Der Shuttle rollt also im gesamten betrachteten Zeitraum vorwärts, eine unplausible Rückwärtsfahrt liefert das Modell nicht.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Im Betrieb ist festgelegt, dass der Shuttlebus während der Testfahrt nicht schneller als $\frac{25}{9}$ m/s (≈ 2.78 m/s) fahren darf. In welchem Zeitraum wird diese Vorgabe nicht eingehalten?

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{25}{9} \\ \frac{25}{9} &= -\frac{1}{90}t^3 + \frac{2}{15}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{5}{2} && \mid -\frac{25}{9} \\ 0 &= -\frac{1}{90}t^3 + \frac{2}{15}t^2 - \frac{1}{3}t - \frac{5}{18} && \mid \cdot(-90) \\ &= t^3 - 12t^2 + 30t + 25 && \mid t_1 = 5 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

	1	-12	30	25
5		5	-35	-25
	1	-7	-5	0

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - 7t - 5 \\ t_{2/3} &= 3.5 \pm \sqrt{3.5^2 + 5} \\ t_2 &\approx 7.653 \quad \vee \quad t_3 \approx -0.653 \end{aligned}$$

Im Intervall $0 \leq t \leq 11.1$ liegen nur $t_1 = 5$ und $t_2 \approx 7.653$. Dazwischen liegt der Graph oberhalb von $\frac{25}{9}$ m/s, z. B. ist $v(6) = 2.9$.

Die Vorgabe wird also im Zeitraum $5 < t < 7.653$ nicht eingehalten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Im Betrieb gilt eine Toleranzregel: Kurzzeitige Überschreitungen der zulässigen Geschwindigkeit sind nur bis zu einer Toleranzgrenze von 3.3 m/s erlaubt. Ermitteln Sie rechnerisch, ob und um wie viel die Shuttlebus-Geschwindigkeit diese Toleranzgrenze im betrachteten Zeitraum überschreitet.

$$v'(t) = -\frac{1}{30}t^2 + \frac{4}{15}t - \frac{1}{3}$$
$$v''(t) = -\frac{1}{15}t + \frac{4}{15}$$

notw. Bed.: $v'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{30}t^2 + \frac{4}{15}t - \frac{1}{3} && \mid \cdot(-30) \\ &= t^2 - 8t + 10 \\ t_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 10} \\ t_1 &\approx 6.449 \quad \vee \quad t_2 \approx 1.551 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $v'(t) = 0 \quad \wedge \quad v''(t) \neq 0$

$$v''(6.449) = -\frac{6.449}{15} + \frac{4}{15} \approx -0.163 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$
$$v''(1.551) = -\frac{1.551}{15} + \frac{4}{15} \approx 0.163 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

y-Wert: $v(t) = y$

$$v(6.449) \approx 2.915 \qquad \Rightarrow \text{HP}(6.45 \mid 2.92)$$
$$v(1.551) \approx 2.262 \qquad \Rightarrow \text{TP}(1.55 \mid 2.26)$$

Die Randwerte $v(0) = 2.5$ und $v(11.1) \approx 0.03$ sind kleiner. Die größte Geschwindigkeit beträgt also etwa 2.92 m/s. Da $2.92 < 3.3$ ist, wird die Toleranzgrenze nicht überschritten, sie wird sogar um etwa 0.38 m/s unterschritten.

d) Lesen Sie aus der Zeichnung ab, nach welcher Zeit der Bus zum Stehen kommt.

Der Graph schneidet die t-Achse bei etwa $t = 11.1$. Der Bus kommt nach ca. 11.1 Sekunden zum Stehen.

e) Der Abbremsvorgang (ab der Höchstgeschwindigkeit) darf nicht länger als 5 Sekunden dauern. Prüfen Sie mit Hilfe vorheriger Ergebnisse, ob diese Vorgabe eingehalten wird.

Ab dem Hochpunkt nimmt die Geschwindigkeit kontinuierlich ab, bis der Bus zum Stillstand kommt. Aus c) ist der Hochpunkt HP(6.45 | 2.92) bekannt, aus d) der Stillstand nach etwa 11.1 s.

Der Abbremsvorgang dauert damit ungefähr

$$11.1 - 6.45 = 4.65$$

Sekunden. Da $4.65\,\text{s} < 5\,\text{s}$ ist, wird die Vorgabe eingehalten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**