DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe cuYZpt

Bestimmen Sie die Extrempunkte der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - 10x + 7$

$$f'(x) = 2x - 10$$
$$f''(x) = 2$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x - 10 && | +10 \\ 2x &= 10 && | :2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(5) = 2 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(5) = 5^2 - 10 \cdot 5 + 7 = -18 \qquad \Rightarrow \text{TP}(5 \mid -18)$$

b) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4$$
$$f''(x) = 20x^3 - 30x$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 5x^4 - 15x^2 + 4 && | :5 \\ &= x^4 - 3x^2 + 0.8 && | \, x^2 = z \\ &= z^2 - 3z + 0.8 \\ z_{1/2} &= 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 0.8} \\ z_1 \approx 2.704 \quad &\vee \quad z_2 \approx 0.296 && | \, x = \sqrt{z} \\ x_1 \approx 1.644 \quad &\vee \quad x_2 \approx -1.644 \quad \vee \quad x_3 \approx 0.544 \quad \vee \quad x_4 \approx -0.544 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(1.644) &= 20 \cdot 1.644^3 - 30 \cdot 1.644 \approx 39.546 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-1.644) &= 20 \cdot (-1.644)^3 - 30 \cdot (-1.644) \approx -39.546 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ f''(0.544) &= 20 \cdot 0.544^3 - 30 \cdot 0.544 \approx -13.1 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ f''(-0.544) &= 20 \cdot (-0.544)^3 - 30 \cdot (-0.544) \approx 13.1 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(1.644) &= 1.644^5 - 5 \cdot 1.644^3 + 4 \cdot 1.644 \approx -3.631 && \Rightarrow \text{TP}_1(1.64 \mid -3.63) \\ f(-1.644) &= (-1.644)^5 - 5 \cdot (-1.644)^3 + 4 \cdot (-1.644) \approx 3.631 && \Rightarrow \text{HP}_1(-1.64 \mid 3.63) \\ f(0.544) &= 0.544^5 - 5 \cdot 0.544^3 + 4 \cdot 0.544 \approx 1.419 && \Rightarrow \text{HP}_2(0.54 \mid 1.42) \\ f(-0.544) &= (-0.544)^5 - 5 \cdot (-0.544)^3 + 4 \cdot (-0.544) \approx -1.419 && \Rightarrow \text{TP}_2(-0.54 \mid -1.42) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

$$f'(x) = -4x + 8$$
$$f''(x) = -4$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -4x + 8 && | +4x \\ 4x &= 8 && | :4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(2) = -4 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 5 = 3 \qquad \Rightarrow \text{HP}(2 \mid 3)$$

d) $f(x) = x^4 - 16x^2 + 5$

$$f'(x) = 4x^3 - 32x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 32$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 32x \\ &= x(4x^2 - 32) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2 - 32 && | +32 \\ 4x^2 &= 32 && | :4 \\ x^2 &= 8 && | \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{8} \approx 2.828 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{8} \approx -2.828 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= 12 \cdot 0^2 - 32 = -32 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ f''(\sqrt{8}) &= 12 \cdot (\sqrt{8})^2 - 32 = 64 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-\sqrt{8}) &= 12 \cdot (-\sqrt{8})^2 - 32 = 64 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^4 - 16 \cdot 0^2 + 5 = 5 && \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 5) \\ f(\sqrt{8}) &= (\sqrt{8})^4 - 16 \cdot (\sqrt{8})^2 + 5 = -59 && \Rightarrow \text{TP}_1(2.83 \mid -59) \\ f(-\sqrt{8}) &= (-\sqrt{8})^4 - 16 \cdot (-\sqrt{8})^2 + 5 = -59 && \Rightarrow \text{TP}_2(-2.83 \mid -59) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$
$$f''(x) = 12x + 6$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x^2 + 6x - 12 && | :6 \\ &= x^2 + x - 2 \\ x_{1/2} &= -0.5 \pm \sqrt{(-0.5)^2 + 2} \\ x_1 &= 1 \quad \vee \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(1) &= 12 \cdot 1 + 6 = 18 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-2) &= 12 \cdot (-2) + 6 = -18 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 1 = -6 && \Rightarrow \text{TP}(1 \mid -6) \\ f(-2) &= 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 1 = 21 && \Rightarrow \text{HP}(-2 \mid 21) \end{aligned}$$

f) $f(x) = 3x^4 - 24x^2 + 9$

$$f'(x) = 12x^3 - 48x$$
$$f''(x) = 36x^2 - 48$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^3 - 48x \\ &= x(12x^2 - 48) && | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 48 && | +48 \\ 12x^2 &= 48 && | :12 \\ x^2 &= 4 && | \sqrt{} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= 36 \cdot 0^2 - 48 = -48 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\ f''(2) &= 36 \cdot 2^2 - 48 = 96 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(-2) &= 36 \cdot (-2)^2 - 48 = 96 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \cdot 0^4 - 24 \cdot 0^2 + 9 = 9 && \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 9) \\ f(2) &= 3 \cdot 2^4 - 24 \cdot 2^2 + 9 = -39 && \Rightarrow \text{TP}_1(2 \mid -39) \\ f(-2) &= 3 \cdot (-2)^4 - 24 \cdot (-2)^2 + 9 = -39 && \Rightarrow \text{TP}_2(-2 \mid -39) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x + 10$

$$f'(x) = -3x^2 + 24x - 36$$
$$f''(x) = -6x + 24$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -3x^2 + 24x - 36 \quad | :(-3) \\ &= x^2 - 8x + 12 \\ x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 12} \\ x_1 &= 6 \quad \vee \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(6) &= -6 \cdot 6 + 24 = -12 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \\ f''(2) &= -6 \cdot 2 + 24 = 12 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(6) &= -6^3 + 12 \cdot 6^2 - 36 \cdot 6 + 10 = 10 \qquad \Rightarrow \text{HP}(6 \mid 10) \\ f(2) &= -2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 10 = -22 \qquad \Rightarrow \text{TP}(2 \mid -22) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) $f(x) = 2x^5 - 20x^3 + 18x$

$$f'(x) = 10x^4 - 60x^2 + 18$$
$$f''(x) = 40x^3 - 120x$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= 10x^4 - 60x^2 + 18 && | :10 \\
&= x^4 - 6x^2 + 1.8 && | x^2 = z \\
&= z^2 - 6z + 1.8 \\
z_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 1.8} \\
z_1 \approx 5.683 \quad &\vee \quad z_2 \approx 0.317 && | x = \sqrt{z} \\
x_1 \approx 2.384 \quad &\vee \quad x_2 \approx -2.384 \quad \vee \quad x_3 \approx 0.563 \quad \vee \quad x_4 \approx -0.563
\end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}
f''(2.384) &= 40 \cdot 2.384^3 - 120 \cdot 2.384 \approx 255.894 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\
f''(-2.384) &= 40 \cdot (-2.384)^3 - 120 \cdot (-2.384) \approx -255.894 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\
f''(0.563) &= 40 \cdot 0.563^3 - 120 \cdot 0.563 \approx -60.422 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\
f''(-0.563) &= 40 \cdot (-0.563)^3 - 120 \cdot (-0.563) \approx 60.422 > 0 && \Rightarrow \text{TP}
\end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned}
f(2.384) &= 2 \cdot 2.384^5 - 20 \cdot 2.384^3 + 18 \cdot 2.384 \\
&\approx -74.061 && \Rightarrow \text{TP}_1(2.38 \mid -74.06) \\
f(-2.384) &= 2 \cdot (-2.384)^5 - 20 \cdot (-2.384)^3 + 18 \cdot (-2.384) \\
&\approx 74.061 && \Rightarrow \text{HP}_1(-2.38 \mid 74.06) \\
f(0.563) &= 2 \cdot 0.563^5 - 20 \cdot 0.563^3 + 18 \cdot 0.563 \\
&\approx 6.678 && \Rightarrow \text{HP}_2(0.56 \mid 6.68) \\
f(-0.563) &= 2 \cdot (-0.563)^5 - 20 \cdot (-0.563)^3 + 18 \cdot (-0.563) \\
&\approx -6.678 && \Rightarrow \text{TP}_2(-0.56 \mid -6.68)
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 6$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 36x - 16 \\ f''(x) &= 12x^2 - 48x + 36 \\ f'''(x) &= 24x - 48 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 24x^2 + 36x - 16 \quad | :4 \\ &= x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \quad | \, x_1 = 1 \end{aligned}$$

	1	−6	9	−4
1		1	−5	4
	1	−5	4	0

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 5x + 4 \\ x_{2/3} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4} \\ x_2 = 4 \quad &\vee \quad x_3 = 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(4) &= 12 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 36 = 36 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''(1) &= 12 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 36 = 0 && \Rightarrow \text{keine Entscheidung} \\ f'''(1) &= 24 \cdot 1 - 48 = -24 \neq 0 && \Rightarrow \text{SP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^4 - 8 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 6 = -26 && \Rightarrow \text{TP}(4 \mid -26) \\ f(1) &= 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 18 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 6 = 1 && \Rightarrow \text{SP}(1 \mid 1) \end{aligned}$$

Bei $x = 1$ liegt kein Extrempunkt, sondern ein Sattelpunkt vor.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

j) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$f''(x) = 6x - 12$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 12x + 9 \quad | :3 \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_1 = 3 \quad &\vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(3) &= 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ f''(1) &= 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 2 = -2 \qquad \Rightarrow \text{TP}(3 \mid -2) \\ f(1) &= 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2 = 2 \qquad \Rightarrow \text{HP}(1 \mid 2) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**