DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe cm4gWV

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0.5x^2 + 6x + 2$.

a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[1; 5]$.

$$\begin{aligned} m_{[1;5]} &= \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \\ &= \frac{\left(-0.5 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 + 2\right) - \left(-0.5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 2\right)}{4} \\ &= \frac{(-12.5 + 30 + 2) - (-0.5 + 6 + 2)}{4} \\ &= \frac{19.5 - 7.5}{4} \\ &= \frac{12}{4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall $[5; 9]$.

$$\begin{aligned} m_{[5;9]} &= \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} \\ &= \frac{\left(-0.5 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9 + 2\right) - \left(-0.5 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 + 2\right)}{4} \\ &= \frac{(-40.5 + 54 + 2) - (-12.5 + 30 + 2)}{4} \\ &= \frac{15.5 - 19.5}{4} \\ &= \frac{-4}{4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

c) Vergleichen Sie beide Werte. Was lässt sich über die Veränderung der Steigung in den beiden Intervallen sagen?

Im Intervall $[1; 5]$ hat der Graph von f mit $m = 3$ eine durchschnittlich positive Steigung, er steigt also im Mittel an. Im Intervall $[5; 9]$ hat er mit $m = -1$ eine durchschnittlich negative Steigung, er fällt also im Mittel. Die Steigung nimmt somit ab.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Bestimmen Sie das Intervall der Länge 2, in dem die mittlere Änderungsrate genau 0 ist.

Bei einer Parabel ist die mittlere Änderungsrate genau dann 0, wenn das Intervall symmetrisch zur Symmetrieachse durch den Scheitelpunkt liegt. Daher wird zunächst der Scheitelpunkt bestimmt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.5x^2 + 6x + 2 \\ &= -0.5(x^2 - 12x) + 2 \\ &= -0.5(x^2 - 12x + 36 - 36) + 2 \\ &= -0.5\left((x-6)^2 - 36\right) + 2 \\ &= -0.5(x-6)^2 + 18 + 2 \\ &= -0.5(x-6)^2 + 20 \\ &\Rightarrow S(6 \mid 20) \end{aligned}$$

Die Symmetrieachse der Parabel liegt bei $x = 6$. Das Intervall der Länge 2 ist daher $[5; 7]$.

$$\begin{aligned} m_{[5;7]} &= \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} \\ &= \frac{\left(-0.5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 2\right) - \left(-0.5 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 + 2\right)}{2} \\ &= \frac{(-24.5 + 42 + 2) - (-12.5 + 30 + 2)}{2} \\ &= \frac{19.5 - 19.5}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das gesuchte Intervall ist also $[5; 7]$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**