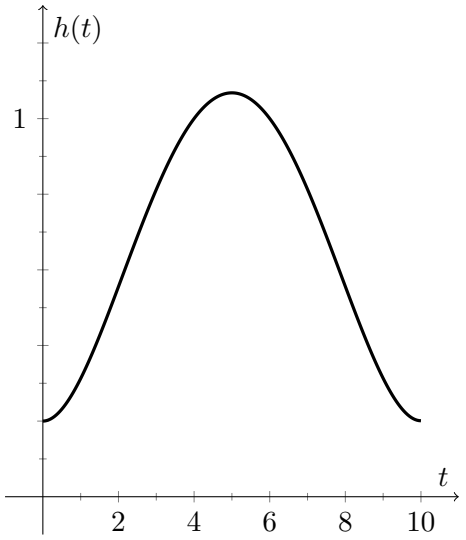
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe cNm9u4

Während eines Hochwassers wurde in einer Stadt der Wasserstand h eines Flusses über mehrere Tage hinweg beobachtet. Die Messwerte sind in der nebenstehenden Abbildung als Graph dargestellt.
Der Verlauf der Hochwasserwelle lässt sich im betrachteten Zeitraum durch die Funktion $h(t) = \frac{1}{720}t^4 - \frac{1}{36}t^3 + \frac{5}{36}t^2 + \frac{1}{5}$ modellieren ($0 \le t \le 10$; t in Tagen, h in Metern).



a) Beschreiben Sie mithilfe des Graphen in eigenen Worten, wie sich der Wasserstand im Verlauf der Hochwasserwelle verändert.

Zu Beginn liegt der Wasserstand auf einem normalen Niveau. Danach steigt er an, zunächst immer stärker und später weiter, aber nicht mehr so stark. Nach einigen Tagen erreicht der Fluss seinen höchsten Stand. Anschließend sinkt der Wasserstand wieder: erst immer schneller, dann immer langsamer, bis schließlich wieder das Normalniveau erreicht ist.

b) Bestimmen Sie den normalen Wasserstand zu Beginn der Messung ($t = 0$).

$$h(0) = \frac{1}{720} \cdot 0^4 - \frac{1}{36} \cdot 0^3 + \frac{5}{36} \cdot 0^2 + \frac{1}{5} = 0.2$$

Der normale Wasserstand zu Beginn der Messung beträgt 0.2 m, also 20 cm.

c) Ermitteln Sie, wie stark der Wasserstand am Ende des ersten Tages zunimmt (momentane Änderungsrate bei $t = 1$). Geben Sie das Ergebnis mit Einheit an.

$$h'(t) = \frac{1}{180}t^3 - \frac{1}{12}t^2 + \frac{5}{18}t$$
$$h'(1) = \frac{1}{180} - \frac{1}{12} + \frac{5}{18} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Am Ende des ersten Tages steigt der Wasserstand also um 0.2 $\frac{\text{m}}{\text{Tag}}$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Wasserstand am schnellsten ansteigt. Berechnen Sie außerdem, wie groß diese maximale Anstiegsrate ist.

Gesucht ist das Maximum der Änderungsrate $h'(t)$, also ein Wendepunkt von h.

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{180}t^3 - \frac{1}{12}t^2 + \frac{5}{18}t \\ h''(t) &= \frac{1}{60}t^2 - \frac{1}{6}t + \frac{5}{18} \\ h'''(t) &= \frac{1}{30}t - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

notw. Bed.: $h''(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{60}t^2 - \frac{1}{6}t + \frac{5}{18} && \mid \cdot 60 \\ &= t^2 - 10t + \frac{50}{3} \\ t_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - \frac{50}{3}} \\ t_1 &= 5 + \frac{5}{3}\sqrt{3} \approx 7.887 \quad \vee \quad t_2 = 5 - \frac{5}{3}\sqrt{3} \approx 2.113 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h''(t) = 0 \quad \wedge \quad h'''(t) \neq 0$

$$h'''\left(5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{30}\left(5 + \frac{5}{3}\sqrt{3}\right) - \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{18} \approx 0.096 > 0 \qquad \Rightarrow \text{stärkste Abnahme}$$

$$h'''\left(5 - \frac{5}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{30}\left(5 - \frac{5}{3}\sqrt{3}\right) - \frac{1}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{18} \approx -0.096 < 0 \qquad \Rightarrow \text{stärkster Anstieg}$$

Bei $t_2 \approx 2.113$ hat h' ein Maximum. Maximale Anstiegsrate:

$$h'(2.113) = \frac{1}{180} \cdot 2.113^3 - \frac{1}{12} \cdot 2.113^2 + \frac{5}{18} \cdot 2.113 \approx 0.267$$

Der Wasserstand steigt also nach etwa 2.11 Tagen am schnellsten an. Die maximale Anstiegsrate beträgt dabei etwa 0.27 $\frac{\text{m}}{\text{Tag}}$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) Die Hochwasserschutzmauer ist 1 m hoch. Ermitteln Sie, in welchen Zeitabschnitten der Wasserstand diese Marke überschreitet und somit Teile der Stadt überflutet sind.
(Tipp: Die Lösung kann direkt über die Tabellenfunktion des Taschenrechners angegeben werden; Startwert 0, Endwert 6, Schrittweite 1.)

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

$$h(t) = 1$$
$$\frac{1}{720}t^4 - \frac{1}{36}t^3 + \frac{5}{36}t^2 + \frac{1}{5} = 1 \quad | -1$$
$$\frac{1}{720}t^4 - \frac{1}{36}t^3 + \frac{5}{36}t^2 - \frac{4}{5} = 0 \quad | \cdot 720$$
$$t^4 - 20t^3 + 100t^2 - 576 = 0 \quad | \, t_1 = -2$$

	1	-20	100	0	-576
-2		-2	44	-288	576
	1	-22	144	-288	0

$$0 = t^3 - 22t^2 + 144t - 288 \quad | \, t_2 = 4$$

	1	-22	144	-288
4		4	-72	288
	1	-18	72	0

$$0 = t^2 - 18t + 72$$
$$t_{3/4} = 9 \pm \sqrt{9^2 - 72}$$
$$t_3 = 12 \quad \vee \quad t_4 = 6$$

Im betrachteten Intervall $0 \leq t \leq 10$ sind damit $t_2 = 4$ und $t_4 = 6$ die relevanten Schnittstellen. Mit der Tabellenfunktion ergibt sich ebenfalls $h(4) = 1$ und $h(6) = 1$, dazwischen gilt z. B. $h(5) \approx 1.068 > 1$.

Der Wasserstand überschreitet die 1-m-Marke also im Zeitabschnitt $4 < t < 6$. In diesem Zeitraum sind Teile der Stadt überflutet.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) Bestimmen Sie Zeitpunkt und Höhe des höchsten Wasserstands.

$$h'(t) = \frac{1}{180}t^3 - \frac{1}{12}t^2 + \frac{5}{18}t$$
$$h''(t) = \frac{1}{60}t^2 - \frac{1}{6}t + \frac{5}{18}$$

notw. Bed.: $h'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{180}t^3 - \frac{1}{12}t^2 + \frac{5}{18}t \quad | \cdot 180 \\ &= t^3 - 15t^2 + 50t \\ &= t(t^2 - 15t + 50) \qquad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - 15t + 50 \\ t_{2/3} &= 7.5 \pm \sqrt{7.5^2 - 50} \\ t_2 &= 10 \quad \vee \quad t_3 = 5 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $h'(t) = 0 \quad \wedge \quad h''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} h''(0) &= \frac{5}{18} > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ h''(10) &= \frac{5}{18} > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ h''(5) &= -\frac{5}{36} < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $h(t) = y$

$$h(5) = \frac{1}{720} \cdot 5^4 - \frac{1}{36} \cdot 5^3 + \frac{5}{36} \cdot 5^2 + \frac{1}{5} = \frac{769}{720} \approx 1.068 \qquad \Rightarrow \text{HP}(5 \mid 1.07)$$

Der höchste Wasserstand tritt also nach 5 Tagen auf und beträgt etwa 1.07 m.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) Ermitteln Sie, ab welchem Tag das Hochwasser endgültig vorbei ist (Wasserstand wieder auf Normalniveau).

Gesucht ist der Zeitpunkt, an dem der Wasserstand wieder den Normalwert aus b) erreicht, also $h(t) = 0.2$.

$$\begin{aligned} h(t) &= 0.2 \\ \frac{1}{720}t^4 - \frac{1}{36}t^3 + \frac{5}{36}t^2 + \frac{1}{5} &= 0.2 \quad | -0.2 \\ \frac{1}{720}t^4 - \frac{1}{36}t^3 + \frac{5}{36}t^2 &= 0 \quad | \cdot 720 \\ t^4 - 20t^3 + 100t^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= t^4 - 20t^3 + 100t^2 \\ &= t^2(t^2 - 20t + 100) \quad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - 20t + 100 \\ t_{2/3} &= 10 \pm \sqrt{10^2 - 100} \\ t_2 &= 10 \end{aligned}$$

Das Hochwasser ist also nach 10 Tagen endgültig vorbei. Der Wasserstand hat dann wieder das Normalniveau erreicht.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**